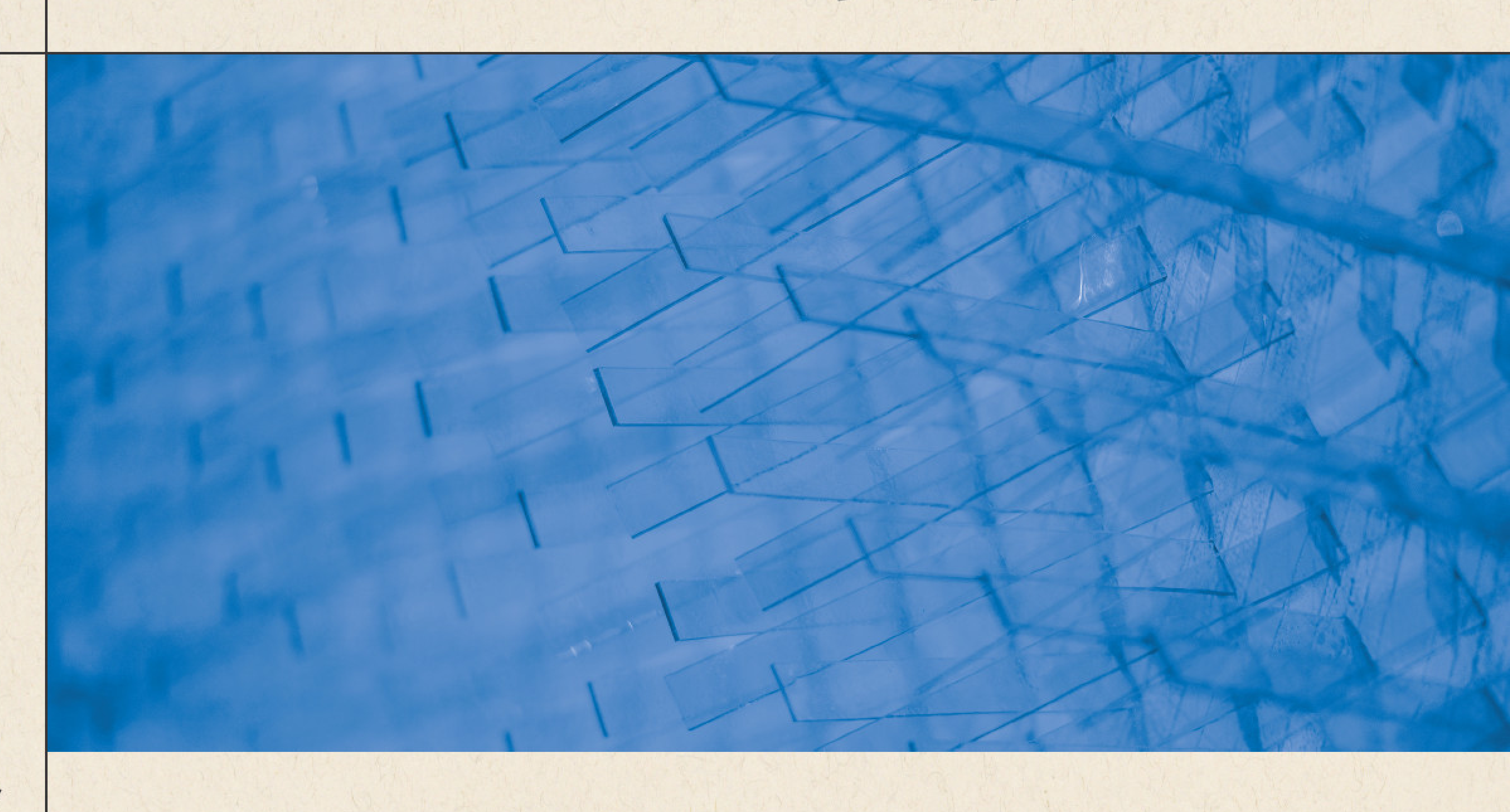
应用型高等院校大学数学特色教材

大学数学

（线性代数与概率统计）

学习辅导



韩建玲

曾健民

主编

清华大学出版社

大学数学(线性代数与概率统计)学习辅导

韩建玲　曾健民　主　编

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书为《大学数学(线性代数与概率统计)》的配套学习辅导书,内容共分10章,包括行列式、矩阵与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型、线性代数应用简介、概率论的基本概念、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计。本书每章有基本要求、内容提要、学习要点、例题增补、教材部分习题解题参考、总习题。本书的目的是帮助学生理解、消化和复习《大学数学(线性代数与概率统计)》的内容,编写中注重培养学生良好的科学思维习惯及实际应用能力。

本书适用于应用型高等院校理工类和经济类专业的公共数学课教学,也可供高等数学授课教师作为教学参考书使用。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学(线性代数与概率统计)学习辅导/韩建玲,曾健民主编. —北京:清华大学出版社,2019
ISBN 978-7-302-53338-2

Ⅰ. ①大…　Ⅱ. ①韩… ②曾…　Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教学参考资料 ②概率论—高等学校—教学参考资料 ③数理统计—高等学校—教学参考资料　Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第161003号

责任编辑:孟毅新
封面设计:傅瑞学
责任校对:袁　芳
责任印制:李红英

出版发行:清华大学出版社
网　　址:http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地　　址:北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**:100084
社 总 机:010-62770175　　**邮　　购**:010-62786544
投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课件下载:http://www.tup.com.cn,010-62770175-4278
印 装 者:三河市少明印务有限公司
经　　销:全国新华书店
开　　本:185mm×260mm　　**印　　张**:10　　**字　　数**:224千字
版　　次:2019年8月第1版　　**印　　次**:2019年8月第1次印刷
定　　价:30.00元

产品编号:082774-01

前言

FOREWORD

《大学数学(线性代数与概率统计)》一书是由清华大学出版社出版的应用型高校教材,体现了数学教学应遵循的"以应用为目的,以必需、够用为度"的原则,强化数学的应用功能。为帮助读者理解、消化和复习《大学数学(线性代数与概率统计)》的内容,培养学生良好的科学思维习惯及实际应用能力,我们编写了《大学数学(线性代数与概率统计)学习辅导》。

本书作为《大学数学(线性代数与概率统计)》的配套教材,以应用、实用和适用为基本原则,以淡化理论并突出实践为指导思想。在编写中结合应用型本科和高职高专的教学特点,对比较烦琐的定理、公式的推导及证明尽可能只给出结果或简单直观地给出几何说明,而解题的过程尽可能做到深入浅出,力求具有一定的启发性和应用性。

在本书的编写过程中,编者参考了大量的同类图书,特别是参考了一些典型例题和习题,它们是各位老师的教学经验积累,对本书中例题和习题的编写起到了很大的帮助作用,特此说明并致谢。本书中有的章节有加"*"的内容,属于附加内容,供有此需求的专业选用。

本书由闽南理工学院韩建玲和曾健民主编。在本书的编写过程中,得到了闽南理工学院领导的具体指导,以及许多教师的协助,在此表示衷心的感谢!

由于编者水平有限,书中难免有不足之处,敬请有关专家、学者及使用本书的师生批评、指正,以帮助我们不断改进。

编　者

2019 年 6 月



目录

CONTENTS

第1章

行 列 式

1.1 基本要求

（1）了解全排列、逆序与逆序数、奇排列与偶排列、对换的概念。

（2）理解 n 阶行列式的定义，并会用行列式定义计算某些特殊的行列式；掌握二、三、四阶行列式的计算方法。

（3）理解行列式的性质；掌握利用行列式的性质及按行(列)展开性质计算行列式的方法；会计算简单的 n 阶行列式。

（4）理解克莱姆(Cramer)法则，会用克莱姆法则求解简单的线性方程组。

1.2 内容提要

1. 行列式的定义

n 阶行列式记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中，$j_1\,j_2\cdots j_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，$\tau(j_1\,j_2\cdots j_n)$ 为这个排列的逆序数，求和符号 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对列标构成的所有的 n 级排列 $j_1\,j_2\cdots j_n$ 求和。

n 阶行列式 D 中所含的 n^2 个数称为 D 的元素，位于第 i 行第 j 列的元素 a_{ij} 称为 D 的$(i,\,j)$元。

二阶和三阶行列式的计算适用对角线法则。

2. 行列式的性质

(1) 行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等。即 $D=D^{\mathrm{T}}$。

(2) 交换行列式中两行(列)的位置,行列式的值变号。

推论　如果行列式中有两行(列)相同,则行列式等于零。

(3) 用数 k 乘以行列式的某一行(列),其结果等于用数 k 乘以原行列式。

推论 1　行列式的某一行(列)中所有元素的公因子可以提到行列式外面。

推论 2　如果行列式中一行(列)的元素都为零,则该行列式为零。

推论 3　如果行列式中有两行(列)成比例,则该行列式为零。

(4) 如果行列式 D 中某一行(列)的每个元素都可以写成两个数的和,则此行列式可以写成两个行列式的和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(5) 将行列式的某一行(列)的所有元素乘以数 k 后,加到另一行(列)对应位置的元素上,行列式的值不变。

3. 行列式按行(列)展开

(1) 在 n 阶行列式中,划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列后,剩下的元素按原来次序组成的 $n-1$ 阶行列式,称为元素 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij};令 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式。

(2) n 阶行列式 D 等于它的任一行(列)的各元素分别与其所对应的代数余子式乘积之和,即可以按第 i 行展开:

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

或者按第 j 列展开:

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

(3) n 阶行列式 D 的某一行(列)中的元素与另外一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j)$$

或

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j)$$

4. 一些常用的行列式

(1) 上、下三角形行列式等于主对角线上元素的乘积,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

注　未写出的元素均为零,下同。

(2) 对角形行列式等于主对角线上元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(1\,2\,\cdots\,(n-1)\,n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(3) 设 $D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$,则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = D_1 D_2$$

5. 克莱姆法则

对于含有 n 个未知数的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

当线性方程组中右端的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 不全为零时,称为非齐次线性方程组;当方程组中右端的常数项 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ 时,称为齐次线性方程组。

(1) 如果上述方程组的系数行列式 $D \neq 0$,那么它有唯一解:$x_j = \dfrac{D_j}{D}(j = 1, 2, \cdots, n)$。其中,$D_j(j = 1, 2, \cdots, n)$为用方程组右端的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 分别替换系数行列式 D 中的第 j 列元素 $a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj}$ 所得到的 n 阶行列式。

(2) 如果上述方程组无解或有两个不同的解,那么它的系数行列式 $D = 0$。

(3) 如果齐次线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$,那么它只有零解;如果齐次线性方程组有非零解,那么它的系数行列式必定等于零。

1.3　学习要点

本章重点是行列式的计算。掌握二、三、四阶行列式的计算方法;理解 n 阶行列式的定义;理解行列式的性质,掌握利用行列式的性质及按行(列)展开性质计算行列式的方法;会计算简单的 n 阶行列式;理解克莱姆法则,会用克莱姆法则求解简单的线性方程组。

1.4 例题增补

例 1-1 计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$。

分析 要计算这个四阶行列式，可以从最后一行起，各行减去上一行，则第 1 列的元素除第 1 个外，全转换为零。第 2 列的元素除第 1 个外，全转换为 a。然后用同样的方法进行计算，可将行列式转换为上三角形行列式再进行计算。

$$D_4=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3-r_2\\ r_2-r_1}]{r_4-r_3}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-r_2]{r_4-r_3}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a^4$$

例 1-2 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$（$n\geqslant 2$）。

分析 此行列式的特点是：除了主对角线元素外，其余元素都相同，故可以从第 2 行起，各行减去第 1 行，这样行列式可转换为

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}$$

因第 2 列元素只剩一个非零元，故按第 2 列展开，行列式即可转换为上三角形行列

式，即

$$D_n=(-1)^{1+2}\times 2\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&n-2\end{vmatrix}=-2(n-2)!$$

*例 1-3　计算行列式 $D_{n+1}=\begin{vmatrix}a_0&b_1&b_2&\cdots&b_n\\d_1&a_1&0&\cdots&0\\d_2&0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\d_n&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}$ $(a_0a_1\cdots a_n\neq 0)$。

分析　因为 D_{n+1} 主对角线上的元素非零，可利用行列式性质将第 1 列除第 1 个元素外的其他元素转换为零，把行列式转换为上三角形行列式，从而可计算出行列式的值。

$$D_n \xlongequal[j=2,3,\cdots,n]{c_1-\frac{d_{j-1}}{a_{j-1}}c_j}\begin{vmatrix}a_0-\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{d_jb_j}{a_j}&b_1&b_2&\cdots&b_n\\0&a_1&0&\cdots&0\\0&0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}=\left(a_0-\sum_{j=1}^{n}\frac{d_jb_j}{a_j}\right)a_1a_2\cdots a_n$$

注　本例中的行列式常称为“爪形”行列式，即非零元素在爪形三线段上，三线段以外的元素均为零。这类行列式常用的计算方法是把它转换为三角形行列式。

*例 1-4　计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}x_1-m&x_2&x_3&\cdots&x_n\\x_1&x_2-m&x_3&\cdots&x_n\\x_1&x_2&x_3-m&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1&x_2&x_3&\cdots&x_n-m\end{vmatrix}$。

分析　该行列式的特点是各行(列)的元素之和相同，且各列除主对角线上的元素外均相同。可考虑下面的方法求解。

解　解法 1　从第 2 列起将各列加到第 1 列，然后从第 2 行起各行加上第 1 行的 -1 倍，得

$$D_n=\begin{vmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-m&x_2&x_3&\cdots&x_n\\\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-m&x_2-m&x_3&\cdots&x_n\\\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-m&x_2&x_3-m&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-m&x_2&x_3&\cdots&x_n-m\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i - m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - m \right) (-m)^{n-1}$$

$$= (-1)^{n-1} m^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - m \right)$$

解法 2　把行列式的第 1 行乘以 -1 后，分别加到第 $2,3,\cdots,n$ 行，然后依次将第 $2,3,\cdots,n$ 列加到第 1 列，得

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ m & -m & 0 & \cdots & 0 \\ m & 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m & 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i - m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - m \right) (-m)^{n-1}$$

$$= (-1)^{n-1} m^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - m \right)$$

例 1-5　设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$，记

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

证明 $D=D_1D_2$。

分析 学习本例，应注重它的结果，以后常要用到此类结果。用后面矩阵的语言来叙述，此结果是

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}_2 \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|$$

证明 略。

例 1-6 当 k 为何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} kx_1+x_4=0 \\ x_1+2x_2-x_4=0 \\ (k+2)x_1-x_2+4x_4=0 \\ 2x_1+x_2+3x_3+kx_4=0 \end{cases}$$

有非零解？

分析 齐次线性方程组有非零解，那么它的系数行列式 $D=0$。此方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} k & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ k+2 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & k \end{vmatrix}$$

注意系数行列式的第 3 列元素只有一个非零元，故按第 3 列展开，逐次降阶，可求得 $D=-15(k-1)$。由 $D=0$，解得 $k=1$。

1.5 教材部分习题解题参考

习题 1-1

1. 按自然数从小到大为标准次序，求下列各排列的逆序数。

(3) $13\cdots(2n-1)24\cdots2n$

解 $\tau[13\cdots(2n-1)24\cdots2n]=0+0+\cdots+0+(n-1)+(n-2)+\cdots+0$

$$=\frac{1}{2}n(n-1)$$

(4) $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots2$

解 $\tau[13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots2]=0+0+\cdots+0+0+2+\cdots+(2n-2)$

$$=n(n-1)$$

2. 确定以下 9 级排列的逆序数，从而确定它们的奇偶性。

(1) 134782695

解 $\tau(134782695)=10$，此排列为偶排列。

(2) 217986354

解 $\tau(217986354)=18$，此排列为偶排列。

(3) 987654321

解 $\tau(987654321)=36$，此排列为偶排列。

习题 1-3

确定 6 阶行列式中以下各乘积的符号。

(1) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$

解 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}=a_{31}a_{42}a_{23}a_{14}a_{65}a_{56}$

因为 $\tau(342165)=0+0+2+3+0+1=6$，所以 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ 的前面应带正号。

(2) $a_{21}a_{13}a_{32}a_{55}a_{64}a_{46}$

解 $a_{21}a_{13}a_{32}a_{55}a_{64}a_{46}=a_{21}a_{32}a_{13}a_{64}a_{55}a_{46}$

因为 $\tau(231654)=0+0+2+0+1+2=5$，所以 $a_{21}a_{13}a_{32}a_{55}a_{64}a_{46}$ 的前面应带负号。

习题 1-4

1. 用行列式的性质计算下列行列式。

(5) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

解
$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-7c_3]{c_2-c_3} \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 3 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\times(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 4 & -1 & -10 \\ 1 & 2 & 2 \\ 10 & 3 & -14 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 4 & -1 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 10 & 3 & 14 \end{vmatrix} \xlongequal[c_1+\frac{1}{2}c_3]{c_2+c_3} \begin{vmatrix} 9 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & -2 \\ 17 & 17 & 14 \end{vmatrix} = 0$$

(6) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

解
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_4-c_2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-r_2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2. 计算下列行列式。

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

解 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[c_1+c_4]{\substack{c_1+c_2\\c_1+c_3}} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 48$

*3. 证明题。

(2) $\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$

证明　左边 $= a\begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$

$= a^2\begin{vmatrix} x & ay+bz & z \\ y & az+bx & x \\ z & ax+by & y \end{vmatrix} + 0 + 0 + b^2\begin{vmatrix} y & z & az+bx \\ z & x & ax+by \\ x & y & ay+bz \end{vmatrix}$

$= a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix} = a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + (-1)^2 b^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$

$= (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} =$ 右边

证毕。

(3) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$

证明　左边 $= \begin{vmatrix} a^2 & a^2+(2a+1) & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & b^2+(2b+1) & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & c^2+(2c+1) & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & d^2+(2d+1) & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{c_3-c_1\\c_4-c_1}]{c_2-c_1} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}$

$= 2\begin{vmatrix} a^2 & a & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & b & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & c & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & d & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^2 & 1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[\text{第二项}\, c_3-4c_2,\ c_4-9c_2]{\text{第一项}\, c_3-4c_2,\ c_4-6c_2}\begin{vmatrix} a^2 & a & 4 & 9 \\ b^2 & b & 4 & 9 \\ c^2 & c & 4 & 9 \\ d^2 & d & 4 & 9 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a^2 & 1 & 4a & 6a \\ b^2 & 1 & 4b & 6b \\ c^2 & 1 & 4c & 6c \\ d^2 & 1 & 4d & 6d \end{vmatrix}=0$$

证毕。

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$

证明 左边$\xlongequal[c_3-c_1,\ c_4-c_1]{c_2-c_1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^4 & b^4-a^4 & c^4-a^4 & d^4-a^4 \end{vmatrix}$

$$=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) & d^2(d^2-a^2) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ b^2(b+a) & c^2(c+a) & d^2(d+a) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1}(b-a)(c-a)(d-a)$$

$$\times\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+a & c-b & d-b \\ b^2(b+a) & c^2(c+a)-b^2(b+a) & d^2(d+a)-b^2(b+a) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)$$

$$\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (c^2+bc+b^2)+a(c+b) & (d^2+bd+b^2)+a(d+b) \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$$

证毕。

(5) $\begin{vmatrix} \cos2\alpha & \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \\ \cos2\beta & \cos^2\beta & \sin^2\beta \\ \cos2\gamma & \cos^2\gamma & \sin^2\gamma \end{vmatrix}=0$

证明 左边$=\begin{vmatrix} \cos2\alpha & \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \\ \cos2\beta & \cos^2\beta & \sin^2\beta \\ \cos2\gamma & \cos^2\gamma & \sin^2\gamma \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos^2\alpha-\sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \\ \cos^2\beta-\sin^2\beta & \cos^2\beta & \sin^2\beta \\ \cos^2\gamma-\sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \sin^2\gamma \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_1+c_3}\begin{vmatrix} \cos^2\alpha & \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \\ \cos^2\beta & \cos^2\beta & \sin^2\beta \\ \cos^2\gamma & \cos^2\gamma & \sin^2\gamma \end{vmatrix}=0=\text{右边}$$

证毕。

习题 1-5

1. 求下列行列式的值。

(4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

解 $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} \xlongequal[r_1+r_3]{r_1+r_2} \begin{vmatrix} 2x+2y & 2x+2y & 2x+2y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

$$=2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-yr_1]{r_2-xr_1} 2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y-x & y & 0 \\ x & x-y & 0 \end{vmatrix}$$

$$=2(x+y)(xy-y^2-x^2)=-2(x^3+y^3)$$

2. 解方程 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & x \\ x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$。

解 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & x \\ x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[r_1+r_4]{\substack{r_1+r_2 \\ r_1+r_3}} \begin{vmatrix} x+2 & x+2 & x+2 & x+2 \\ 1 & 0 & 1 & x \\ x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 & 0 \end{vmatrix} = (x+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & x \\ x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_4-r_1]{r_2-r_1}(x+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & x-1 \\ x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(x+2)\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & -1 & x-1 \\ x & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=x(x+2)\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & x-1 \\ x-1 & -1 \end{vmatrix}=x^4-4x^2$$

所以 $x^4-4x^2=0$,得方程的解为

$$x_{1,2}=0,\quad x_3=2,\quad x_4=-2$$

*3. 计算下列行列式(D_n 为 n 阶行列式)。

(1) $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$

解 $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \xlongequal[r_1+r_n]{\substack{r_1+r_2\\ r_1+r_3\\ \vdots}} [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_n-ar_1]{\substack{r_2-ar_1\\ r_3-ar_1\\ \vdots}} [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

（2）$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

解 $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{0\leqslant i<j\leqslant n}[(a-j)-(a-i)]$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{0\leqslant i<j\leqslant n}(i-j)=\prod_{0\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)$$

（3）$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \cdots & n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2^n & 3^n & \cdots & n^n \end{vmatrix}$

解 每列提出公因数 $1,2,\cdots,n$，将其转换为范德蒙行列式。

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \cdots & n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2^n & 3^n & \cdots & n^n \end{vmatrix}=(n!)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=(n!)\cdot\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(i-j)=\prod_{k=1}^{n}(k!)$$

习题 1-6

2. 求 λ 在什么条件下，方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2=0\\ x_1+\lambda x_2=0\end{cases}$ 有非零解。

解　当 $D=0$ 时，即 $\lambda^2-1=0$ 时，方程组有非零解。即 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$ 时，方程组有非零解。

总习题 1

1. 选择题。

(1) n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$，则展开式中项 $a_{12}a_{23}a_{34}\cdots a_{(n-1)n}a_{n(n+1)}$ 的符号为(　　)。

A. $-$　　B. $+$　　C. $(-1)^n$　　D. $(-1)^{n-1}$

(2) 方程 $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&-2&2&x\\1&4&4&x^2\\1&-8&8&x^3\end{vmatrix}=0$ 的根为(　　)。

A. 1,2,3　　B. 1,2,−2　　C. 0,1,2　　D. 1,−1,2

(3) 已知齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x+y+z=0\\ \lambda x+3y-z=0\\ -y+\lambda z=0\end{cases}$ 仅有零解，则(　　)。

A. $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq1$　　B. $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$

C. $\lambda=0$　　D. $\lambda=1$

(4) 已知方程组 $\begin{cases}x+y+\lambda z=1\\ x+y-z=2\\ x-y+z=3\end{cases}$ 有唯一解，则(　　)。

A. $\lambda=0$　　B. $\lambda=-1$　　C. $\lambda\neq-1$　　D. $\lambda\neq0$

2. 填空题。

(1) 排列(134782695)的逆序数为________。

(2) $\begin{vmatrix}1&&&\\&2&&\\&&3&\\&&&4\end{vmatrix}=$________，$\begin{vmatrix}&&&1\\&&2&\\&3&&\\4&&&\end{vmatrix}=$________。

(3) 已知四阶行列式 $D=3$，则 $-D=$________，$D^{\mathrm{T}}=$________。

(4) 设 $D_4=\begin{vmatrix}1&x&x^2&x^3\\-1&1&1&-1\\-1&1&-1&1\\-1&-1&1&1\end{vmatrix}$，则展开式中 x^2 项的系数为=________。

（5）$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 200 & 400 & 800 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}=$________。

（6）设 $D=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \\ 7 & 9 & 8 \end{vmatrix}$，则元素 a_{32} 的余子式 $M_{32}=$________，代数余子式 $A_{32}=$________。

（7）如果行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 1 & -4 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ 中第 2 行第 1 列的代数余子式 $A_{12}=5$，则 $a=$________。

3. 判断题。

（1）交换行列式的两行，行列式的值不变。（　　）

（2）设 D 为三阶行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，则 $a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0$。（　　）

（3）上、下三角形行列式与对角行列式的值等于主对角线上元素的乘积。（　　）

（4）若非齐次线性方程组无解或有两个不同的解，那么其系数行列式不等于零。（　　）

（5）若齐次线性方程组的系数行列式不等于 0，则它只有零解。（　　）

4. 计算题。

（1）计算下列行列式。

① $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 297 & 202 & 99 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$　　② $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$

③ $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4+a \end{vmatrix}$　　④ $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

（2）求满足下列方程的实数 x，y，z。

$$D=\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ x & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

（3）求解下列方程。

① $\begin{vmatrix} x+1 & 2 & -1 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}=0$

② $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & c \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}=0$（其中 a，b，c 互不相等）

(4) 计算 n 阶行列式。

$$D_n=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

(5) 计算 n 阶行列式。

$$D_n=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

(6) 解线性方程组。

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8 \\ x_1-3x_2-6x_4=9 \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{cases}$$

(7) 问 λ 取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} (5-\lambda)x+2y+2z=0 \\ 2x+(6-\lambda)y=0 \\ 2x+(4-\lambda)z=0 \end{cases}$$

有非零解？

答案

1. (1) D　　(2) B　　(3) A　　(4) C

2. (1) 10　　(2) 24，24　　(3) 3，3　　(4) -4

　(5) -200　　(6) -26，26　　(7) -5

3. (1) ×　　(2) √　　(3) √　　(4) ×　　(5) √

4. (1) ① 4　　② $(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$

　③ $(a+10)a^3$　　④ 336

(2) 提示：这是一个“爪形”行列式，可利用行列式性质将第 1 列除第 1 个元素外的其他元素转换为零，把行列式转换为上三角形行列式，从而可计算出行列式的值。经转换得

$x^2+y^2+z^2=0$，解得

$$x=y=z=0$$

(3) ① 提示：左式$=(x+3)(x^2-3)$，得出方程的解为

$$x_1=-3,\quad x_2=\sqrt{3},\quad x_3=-\sqrt{3}$$

② 注意方程左边为四阶范德蒙行列式，所以由范德蒙行列式的结果得

$$(x-a)(x-b)(x-c)(a-b)(a-c)(b-c)=0$$

由于 a，b，c 互不相等，所以方程的解为

$$x_1=a,\quad x_2=b,\quad x_3=c$$

(4) 将行列式按第 1 列展开得：$D_n=x^n+(-1)^{n+1}y^n$。

(5) 将行列式按最后一行展开得：$D_n=a^n-a^{n-2}=a^{n-2}(a^2-1)$。

(6) $D=27\neq0$，$D_1=81$，$D_2=-108$，$D_3=-27$，$D_4=27$。于是

$$x_1=3,\quad x_2=-4,\quad x_3=-1,\quad x_4=1$$

(7) 齐次线性方程组要有非零解，那么它的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}5-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 6-\lambda & 0\\ 2 & 0 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)(2-\lambda)(8-\lambda)=0$$

故 $\lambda=2,5,8$ 时，所给齐次线性方程组有非零解。

第2章

矩阵与线性方程组

2.1 基本要求

（1）理解矩阵的概念；了解单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵、三角矩阵、对称矩阵以及它们的基本性质。

（2）掌握矩阵的线性运算（即矩阵的加法及矩阵与数的乘法运算）、矩阵与矩阵的乘法、矩阵的转置、方阵的行列式以及它们的运算规律。

（3）理解可逆矩阵的概念；理解伴随矩阵的概念和性质；掌握矩阵可逆的充要条件，会用伴随矩阵求矩阵的逆矩阵；掌握可逆矩阵的性质。

（4）掌握矩阵的初等变换及其用矩阵的初等变换求逆矩阵的方法；掌握用初等行变换把矩阵转换为阶梯形和行简化阶梯形；掌握用初等行变换求线性方程组的解的方法。

（5）理解矩阵秩的概念并掌握用初等行变换求矩阵的秩的方法。

*（6）了解矩阵的分块及其运算规律。

（7）理解齐次方程组有非零解的充要条件；理解非齐次方程组无解、有唯一解、有无限多个解的充要条件。

2.2 内容提要

1. 定义与记号

1）矩阵的定义与记号

$m\times n$ 矩阵，记作 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，也可记作 $(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $(a_{ij})_{mn}$，简记作 (a_{ij})。其中，a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素。

零矩阵，记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$，简记作 $\boldsymbol{O}$。

负矩阵，记作 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n}$。

对角矩阵，记作 $\mathrm{diag}[a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}]$。

单位矩阵，记作 $\boldsymbol{I}_n$ 或 $\boldsymbol{E}_n$，简记作 $\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{E}$。

2）矩阵初等变换的记号

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，通常记作 $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$，一般 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{B}$。交换 i,j 两行，记作 $r_i\leftrightarrow r_j$；第 i 行乘以数 k，记作 $r_i\times k$；第 j 行乘以数 k 加到第 i 行，记作 r_i+kr_j。

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$（或 $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$）。

2．矩阵的运算及运算规律

（1）矩阵的加法满足以下规律。

① 交换律：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$

② 结合律：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$

③ 零矩阵满足：$\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$

④ 存在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足：$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$

（2）矩阵的数乘运算满足以下规律。

① $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$

② $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$

③ $(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})=l(k\boldsymbol{A})$

④ $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$

⑤ $0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

（3）矩阵乘法满足以下运算规律。

① $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$

② $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$；$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$

③ $k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$，其中 k 为常数

④ $\boldsymbol{IA}=\boldsymbol{AI}=\boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵

⑤ $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$

注 矩阵的乘法不满足交换律和消去律。

（4）方阵的幂的性质。

① $\boldsymbol{A}^{k_1}\boldsymbol{A}^{k_2}=\boldsymbol{A}^{k_1+k_2}$

② $(\boldsymbol{A}^{k_1})^{k_2}=\boldsymbol{A}^{k_1\cdot k_2}$

（5）矩阵转置运算的性质。

① $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$

② $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$

③ $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

④ $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，其中 k 为常数

3．逆矩阵

（1）定义：对于方阵 $\boldsymbol{A}$，如果存在方阵 $\boldsymbol{B}$，使得

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$$

则称方阵 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵,$\boldsymbol{B}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵,记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$。

(2) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆$\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|\neq 0\Leftrightarrow$存在方阵 $\boldsymbol{B}$,使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}\Leftrightarrow$存在方阵 $\boldsymbol{B}$,使得 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$。

(3) 逆矩阵的性质:

① 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也可逆,且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$。

② 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,数 $\lambda\neq 0$,则 $\lambda\boldsymbol{A}$ 可逆,且 $(\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$。

③ 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵且均可逆,则 $\boldsymbol{AB}$ 也可逆,且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$。

④ 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也可逆,且 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$。

⑤ 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}$。

(4) 伴随矩阵:

设 A_{ij} 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式,则矩阵

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵。

伴随矩阵满足:

① $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$

② $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$

4. 矩阵的秩的性质

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,则 $r(\boldsymbol{A})\leqslant\min(m,n)$。

(2) 若 $r(\boldsymbol{A})=0$,则 $\boldsymbol{A}=0$。

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 为满秩方阵,则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$。

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 为方阵,且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,则 $\boldsymbol{A}$ 为满秩方阵。

(5) 若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,$r(\boldsymbol{A})=r$,则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$,其中 $\boldsymbol{P}$ 为 m 阶方阵,$\boldsymbol{Q}$ 为 n 阶方阵。

(6) 若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等变换,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩不变,且当 $\boldsymbol{P}$ 为 m 阶,$\boldsymbol{Q}$ 为 n 阶可逆方阵时,$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{PA})=r(\boldsymbol{AQ})=r(\boldsymbol{PAQ})$。

(7) 设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵,则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$。

(8) 设 $\boldsymbol{A}$ 可逆,$r(\boldsymbol{A})=n$,则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{-1})=n$。

(9) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵,则 $r(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$。

(10) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times s$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $s\times n$ 矩阵，则 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min[r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})]$。

5. 分块矩阵

用一些横线和竖线把矩阵分成若干小块，这种“操作”称为对矩阵进行分块。矩阵分块后，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵。分块矩阵在运算时，可以把每个小块看作“数”来运算。

6. 线性方程组的解

(1) 基本定理。线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件为系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，即 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b})$。且当 $r(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b})=n$ 时有唯一解。当 $r(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b})<n$ 时，有无穷多个解。

齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 有非零解的充分必要条件是其系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})<n$。

① 当 $m<n$ 时，齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 有非零解。

② 当 $m=n$ 时，齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 有非零解的充分必要条件是它的系数行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$。

(2) 求解线性方程组的过程。

2.3 学习要点

矩阵是线性代数研究的主要对象，也是线性代数讨论问题的主要工具。本章所述矩阵的概念及其运算都是最基本的，应切实掌握。矩阵的乘法除必须熟练掌握外，还必须理解它不满足交换律及消去律。要理解逆矩阵、伴随矩阵的概念，掌握求逆矩阵的方法。本章还介绍了矩阵的初等变换、初等矩阵及矩阵的行阶梯形、行最简形、标准形等概念，并引入了用初等变换求逆矩阵的方法。了解矩阵按行按列分块的运算规则，对于利用分块简化矩阵运算的技巧则不必要求。

矩阵的秩是矩阵的一个重要指数，它是矩阵在初等变换下的不变量，因此在初等变换的辅助下，矩阵的秩有着十分广泛的应用。对矩阵秩的性质也要有所了解，以增强应用矩阵的秩解决问题的能力。

线性方程组的理论与求解方法是线性代数中的重要内容之一，一定要切实掌握，尤其要重点掌握把矩阵转换为行最简形的运算以及根据增广矩阵的行最简形熟练地写出线性方程组的通解；理解矩阵秩的概念及线性方程组的基本定理。

2.4 例题增补

例 2-1 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}$$

试求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$。

分析 本例的意义已超出单纯的计算，而是说明：①矩阵乘法不一定满足交换律，即一般情况下 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$；②实数乘法的消去律不能简单套用于矩阵乘法，即不能从 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 推出矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，也不能从 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{O}$ 且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 推出 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$。

解 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16 & -32\\ 8 & 16\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

例 2-2 求二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$的逆矩阵。

分析 当 $ad-bc\neq0$ 时，有

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

此式应作为公式熟练掌握。

解 $|\boldsymbol{A}|=ad-bc$，$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$，则当 $ad-bc\neq0$ 时，有

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

例 2-3 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

求矩阵 $\boldsymbol{X}$，使其满足 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$。

分析 本例是求解矩阵方程，其解为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}$。注意这里是对方程 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$ 两边同时左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，右乘 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 得到的。由矩阵乘法一般不满足交换律可知顺序不能改变，不能写成 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}$。

解 若 $\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{B}^{-1}$存在，将方程 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$ 两边同时左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，右乘 $\boldsymbol{B}^{-1}$，可得

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}$$

由于$|\boldsymbol{A}|=2\neq0$，$|\boldsymbol{B}|=1\neq0$，从而 $\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{B}^{-1}$存在，且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2}\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$$

于是 $$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2}\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 10 & -4\\ -10 & 4\end{pmatrix}$$

例 2-4 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -1\\ 2 & -4 & 8 & 0\\ -2 & 4 & -2 & 3\\ 3 & -6 & 0 & -6\end{pmatrix}$的秩。

分析 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})$是通过 $\boldsymbol{A}$ 中最高阶非零子式的阶数来定义的，在具体计算 $r(\boldsymbol{A})$时，若用定义，则往往要计算很多行列式，计算量很大，因此一般用初等行变换来求秩，把 $r(\boldsymbol{A})$的计算归结为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯形中非零行的计数，这比用定义方便许多。

解 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -1\\ 2 & -4 & 8 & 0\\ -2 & 4 & -2 & 3\\ 3 & -6 & 0 & -6\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -6 & -3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

因此 $r(\boldsymbol{A})=2$。

例 2-5 设有线性方程组

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3\\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda\end{cases}$$

问：当 λ 取何值时，此方程组(1)有唯一解；(2)无解；(3)有无穷多个解。

分析 求解带参数的方程组，何时无解、有唯一解、有无穷多个解，这是教材中定理 2-7-2 的综合应用。最具一般性的方法就是对增广矩阵$(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{b})$作初等行变换。

解 $(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\end{pmatrix}$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1+\lambda & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda\\ 0 & -\lambda & -\lambda(2+\lambda) & -\lambda(1+\lambda)\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & (1-\lambda)(3+\lambda)\end{pmatrix}$$

因此：

(1) 当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq -3$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{b})=3$，方程组有唯一解。

(2) 当 $\lambda=0$ 时，$r(\boldsymbol{A})=1$，$r(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{b})=2$，方程组无解。

(3) 当 $\lambda=-3$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{b})=2$，方程组有无穷多个解。

2.5　教材部分习题解题参考

习题 2-2

2. 计算下列各题。

(3) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

解 $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\times7+3\times2+1\times1 \\ 1\times7+(-2)\times2+3\times1 \\ 5\times7+7\times2+0\times1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 35 \\ 6 \\ 49 \end{pmatrix}$

(7) $(x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

解 $(x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$=(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \quad a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \quad a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{A}^3,\cdots,\boldsymbol{A}^k$。

解 $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\lambda & 1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\lambda & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3\lambda & 1 \end{pmatrix}$

下面利用数学归纳法证明：$\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k\lambda & 1 \end{pmatrix}$。

当 $n=1$ 时，显然成立。现假设 $n=k$ 时成立，则 $n=k+1$ 时

$$\boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k\lambda & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (k+1)\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

由数学归纳法原理知：

$$\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，证明 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 也是对称矩阵。

证明　已知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，则

$$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$$

从而 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 也是对称矩阵。证毕。

6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶对称矩阵，证明 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$。

证明　由已知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$ 可证：

充分性　　$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\Rightarrow\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\Rightarrow\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}$

即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵。

必要性　　$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$

证毕。

习题 2-3

1. 将矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&2&-1\\-1&-2&-2&1&2\\2&4&8&12&4\end{pmatrix}$ 转换为阶梯形矩阵和行简化阶梯形矩阵。

解　先把 $\boldsymbol{A}$ 转换为阶梯形矩阵，再将其转换为行简化阶梯形矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&2&-1\\-1&-2&-2&1&2\\2&4&8&12&4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&2&3&2&-1\\0&0&1&3&1\\0&0&2&8&6\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2}\begin{pmatrix}1&2&3&2&-1\\0&0&1&3&1\\0&0&0&2&4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}\times r_3]{r_1-3r_2}\begin{pmatrix}1&2&0&-7&-4\\0&0&1&3&1\\0&0&0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-3r_3]{r_1+7r_3}\begin{pmatrix}1&2&0&0&10\\0&0&1&0&-5\\0&0&0&1&2\end{pmatrix}$$

习题 2-4

2. 解下列矩阵方程。

(1) $\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}$

解　$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-23\\0&8\end{pmatrix}$

(2) $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\end{pmatrix}$

解　$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}$

$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&3&-2\\-3&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2&1\\-\frac{8}{3}&5&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1&4\\-1&2\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\0&-1\end{pmatrix}$

解　$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&4\\-1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}^{-1}$

$=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}2&-4\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}6&6\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\\frac{1}{4}&0\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-4&3\\2&0&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}$

解　$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&-4&3\\2&0&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{-1}$

$=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-4&3\\2&0&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&3&-4\\1&0&-2\end{pmatrix}$

3. 设 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$($k$ 为正整数)，证明：$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}$。

证明　由于 $\boldsymbol{I}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$，且由 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$ 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I}&=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2)+\boldsymbol{A}^2-\cdots-\boldsymbol{A}^{k-1}+(\boldsymbol{A}^{k-1}-\boldsymbol{A}^k)\\&=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\end{aligned}$$

故

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$$

将上式两端同时右乘$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$，即有

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}$$

证毕。

4. 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$ 都可逆，并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 及$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})^{-1}$。

证明　由　　$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$

得　　$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{I}$

两端同时取行列式　　$|\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}|=2$

即 $$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}|=2$$

故$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，所以$\boldsymbol{A}$可逆。

又由于

$$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}^2,\quad |\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}|=|\boldsymbol{A}^2|=|\boldsymbol{A}|^2\neq 0$$

故$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$也可逆。证毕。

由于

$$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}\Rightarrow\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=2\boldsymbol{I}\Rightarrow\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{I}\Rightarrow\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})$$

且

$$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}\Rightarrow(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})\boldsymbol{A}-3(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})=-4\boldsymbol{I}\Rightarrow(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})=-4\boldsymbol{I}$$

所以 $$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})=-4(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})^{-1}$$

$$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})^{-1}=\frac{1}{4}(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$$

5. 设$\boldsymbol{A}$为3阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{2}$，求$|(2\boldsymbol{A})^{-1}-3\boldsymbol{A}^*|$。

解 因为$|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{2}\neq 0$，故$\boldsymbol{A}$可逆，于是由

$$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1},\quad(2\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}$$

得 $$(2\boldsymbol{A})^{-1}-3\boldsymbol{A}^*=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}-\frac{3}{2}\boldsymbol{A}^{-1}=-\boldsymbol{A}^{-1}$$

两端取行列式得

$$|(2\boldsymbol{A})^{-1}-3\boldsymbol{A}^*|=|-\boldsymbol{A}^{-1}|=(-1)^3|\boldsymbol{A}|^{-1}=-2$$

6. 设矩阵$\boldsymbol{A}$可逆，证明其伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*$也可逆，且$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*$。

证明 因为$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，由$\boldsymbol{A}^{-1}$的可逆性及$|\boldsymbol{A}|\neq 0$可知$\boldsymbol{A}^*$可逆，且

$$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$$

由伴随矩阵的性质，有

$$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}^{-1}|\boldsymbol{I}$$

用$\boldsymbol{A}$左乘此式两边得

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}^{-1}|\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|^{-1}\boldsymbol{A}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$$

比较上面两个式子，即知结论成立。证毕。

7. 设n阶矩阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵为$\boldsymbol{A}^*$。证明：

(1) 若$|\boldsymbol{A}|=0$，则$|\boldsymbol{A}^*|=0$。

(2) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$。

证明

(1) 用反证法证明。假设$|\boldsymbol{A}^*|\neq 0$，则有

$$\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\boldsymbol{I}$$

由此得

$$A = AA^*(A^*)^{-1} = |A| I (A^*)^{-1} = O$$

所以，$A^* = O$。这与 $|A^*| \neq 0$ 矛盾，故当 $|A| = 0$ 时，有 $|A^*| = 0$。证毕。

(2) 由于 $AA^* = |A| I$，取行列式得到

$$|A||A^*| = |A|^n$$

若 $|A| \neq 0$，则 $|A^*| = |A|^{n-1}$。

若 $|A| = 0$，由(1)知 $|A^*| = 0$，此时命题也成立。

故有 $|A^*| = |A|^{n-1}$。

证毕。

8. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，$AB = A + 2B$，求 B。

解　由 $AB = A + 2B$ 可得 $(A - 2I)B = A$，故

$$B = (A - 2I)^{-1}A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

9. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且 $AB + I = A^2 + B$，求 B。

解　由方程 $AB + I = A^2 + B$，合并含有未知矩阵 B 的项，得

$$(A - I)B = A^2 - I = (A + I)(A - I)$$

又因为 $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，其行列式 $\det(A - I) = -1 \neq 0$，故 $A - I$ 可逆。用 $(A - I)^{-1}$ 左乘上式两边，即得

$$B = A + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

10. 设 $A = \mathrm{diag}(1, -2, 1)$，$A^*BA = 2BA - 8I$，求 B。

解　由于所给矩阵方程中含有 A 及其伴随矩阵 A^*，因此仍从公式 $AA^* = |A| I$ 着手。为此，用 A 左乘所给方程两边，得

$$AA^*BA = 2ABA - 8A$$

又

$$|A| B = 2AB - 8I \Rightarrow (2A + 2I)B = 8I \Rightarrow (A + I)B = 4I$$

注意到 $A + I = \mathrm{diag}(1, -2, 1) + \mathrm{diag}(1, 1, 1) = \mathrm{diag}(2, -1, 2)$ 是可逆矩阵，且

$$(A + I)^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$$

因此

$$B = 4(A + I)^{-1} = \mathrm{diag}(2, -4, 2)$$

*习题 2-6

2. 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，验证 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{vmatrix}\neq\begin{vmatrix}|\boldsymbol{A}|&|\boldsymbol{B}|\\|\boldsymbol{C}|&|\boldsymbol{D}|\end{vmatrix}$。

解 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=4$

而
$$\begin{vmatrix}|\boldsymbol{A}|&|\boldsymbol{B}|\\|\boldsymbol{C}|&|\boldsymbol{D}|\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0$$

故
$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{vmatrix}\neq\begin{vmatrix}|\boldsymbol{A}|&|\boldsymbol{B}|\\|\boldsymbol{C}|&|\boldsymbol{D}|\end{vmatrix}$$

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&4&&\\4&-3&&\boldsymbol{O}\\&&2&0\\\boldsymbol{O}&&2&2\end{pmatrix}$，求 $|\boldsymbol{A}^8|$ 及 $\boldsymbol{A}^4$。

解 令 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}2&0\\2&2\end{pmatrix}$，则
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$$

故
$$\boldsymbol{A}^8=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}^8=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^8&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2^8\end{pmatrix}$$

得
$$|\boldsymbol{A}^8|=|\boldsymbol{A}_1^8||\boldsymbol{A}_2^8|=|\boldsymbol{A}_1|^8|\boldsymbol{A}_2|^8=10^{16}$$

$$\boldsymbol{A}^4=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^4&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5^4&0&&\\0&5^4&&\boldsymbol{O}\\&&2^4&0\\\boldsymbol{O}&&2^6&2^4\end{pmatrix}$$

4. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及 s 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 都可逆，求 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}^{-1}$。

解 将 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}^{-1}$ 分块为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_1&\boldsymbol{C}_2\\\boldsymbol{C}_3&\boldsymbol{C}_4\end{pmatrix}$，其中，$\boldsymbol{C}_1$ 为 $s\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{C}_2$ 为 $s\times s$ 矩阵。$\boldsymbol{C}_3$ 为 $n\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{C}_4$ 为 $n\times s$ 矩阵。则
$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_{n\times n}\\\boldsymbol{B}_{s\times s}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_1&\boldsymbol{C}_2\\\boldsymbol{C}_3&\boldsymbol{C}_4\end{pmatrix}=\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_s\end{pmatrix}$$

由此得到
$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_3=\boldsymbol{I}_n\Rightarrow\boldsymbol{C}_3=\boldsymbol{A}^{-1}\\\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_4=\boldsymbol{O}\Rightarrow\boldsymbol{C}_4=\boldsymbol{O}\quad（\boldsymbol{A}^{-1}\text{存在}）\\\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{O}\Rightarrow\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{O}\quad（\boldsymbol{B}^{-1}\text{存在}）\\\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}_2=\boldsymbol{I}_s\Rightarrow\boldsymbol{C}_2=\boldsymbol{B}^{-1}\end{cases}$$

故
$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$$

5. 求下列矩阵的逆矩阵。

(1) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

解　这里矩阵 $A=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$是一个分块对角矩阵，其中：
$$A_1=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$
因为
$$A_1^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix},\quad A_2^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$$
故
$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & A_2^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

解　记所给矩阵为 $A=(a_{ij})$，令其子块矩阵
$$A_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\quad A_{22}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\quad A_{21}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
则
$$A_{11}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\quad A_{22}^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\quad -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix} -12 & -4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$
由第 4 题的结果，可得
$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & O \\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 24 & & & \\ -12 & 12 & & \\ -12 & -4 & 8 & \\ 3 & -5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

习题 2-7

2. 解方程组$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-8y+3z=0 \\ -8x+2y+3z=0 \end{cases}$。

解 对增广矩阵施行初等行变换如下：

$$(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\2&-8&3&0\\-8&2&3&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+6r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\2&-8&3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\0&-10&5&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{10}\times r_2}\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\0&1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}&0\\0&1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

这时，对应的方程组为

$$\begin{cases}x-\dfrac{1}{2}z=0\\y-\dfrac{1}{2}z=0\end{cases}$$

则方程组的解为

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}z\\y=\dfrac{1}{2}z\end{cases}\quad(z\text{ 为自由未知量})$$

4．当 a 取什么值时，方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\3x_1+2x_2+x_3-3x_4=a\\x_2+2x_3+6x_4=3\end{cases}$ 有解？并求出它的解。

解 对增广矩阵施行初等行变换如下：

$$(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\3&2&1&-3&a\\0&1&2&6&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-6&a-3\\0&1&2&6&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&6&3\\0&-1&-2&-6&a-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&6&3\\0&0&0&0&a\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&-5&-2\\0&1&2&6&3\\0&0&0&0&a\end{pmatrix}$$

所以，当 $a\neq0$ 时，$r(\boldsymbol{A})=2$，$r(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b})=3$，方程组无解；当 $a=0$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b})=2$，方程组有解。这时，对应的方程组为

$$\begin{cases}x_1-x_3-5x_4=-2\\x_2+2x_3+6x_4=3\end{cases}$$

解为

$$\begin{cases}x_1=-2+x_3+5x_4\\x_2=3-2x_3-6x_4\end{cases}\quad（其中\ x_3,x_4\ 为自由未知量）$$

总习题 2

1．选择题。

（1）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2\\3&-3\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^*$ 为（　　）。

A. $\begin{pmatrix}3&-2\\-3&1\end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix}-3&2\\-3&1\end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix}-3&-3\\2&1\end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix}1&-2\\3&-3\end{pmatrix}$

（2）$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B})<n$ 时，则 n 元线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$（　　）。

A. 无解　B. 有唯一解

C. 有无穷多个解　D. 无法确定解的个数

（3）当 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B})=n$ 时，n 元线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$（　　）。

A. 无解　B. 有唯一解

C. 有无穷多个解　D. 无法确定解的个数

（4）行列式 $D=\begin{vmatrix}k-1&2\\3&k\end{vmatrix}\neq 0$ 的充分必要条件是（　　）。

A. $k\neq-2$　B. $k\neq3$

C. $k\neq-2$ 或 $k\neq3$　D. $k\neq-2$ 且 $k\neq3$

（5）设方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{I}$，则必有（　　）。

A. $\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{I}$　B. $\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{I}$　C. $\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{I}$　D. $\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{I}$

2．填空题。

（1）$\boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix}1&2\\5&4\end{vmatrix}=$________，$\boldsymbol{D}_2=\begin{vmatrix}1&0&2\\0&3&0\\1&0&1\end{vmatrix}=$________。

（2）已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&4\\3&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&3\\1&-2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB}=$________，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=$________。

（3）已知 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=3$，则 $|2\boldsymbol{A}|=$________，$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=$________，$|-\boldsymbol{A}|=$________。

（4）已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2\\3&-3\end{pmatrix}$，则 $3\boldsymbol{A}=$________，$\boldsymbol{A}^{-1}=$________。

（5）已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&-5\\4&7&7\end{pmatrix}$，则 $r(\boldsymbol{A})=$________。

3．判断题。

(1) 矩阵的乘法满足交换律：$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$。 ( )

(2) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 一定是非奇异矩阵。 ( )

(3) 矩阵的转置满足运算 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$。 ( )

(4) 线性方程组的解中自由未知量的选取是唯一的。 ( )

(5) 矩阵的乘法运算满足消去律。 ( )

4．计算题。

(1) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ -5 & 2\end{pmatrix}$，求：①$\boldsymbol{A}^{-1}$；②$10\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{B}$。

(2) 设矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{BB}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{X}$。

(3) 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$。

(4) 求线性方程组 $\begin{cases}x_1+3x_2-2x_3+2x_4-x_5=0\\ x_3+2x_4-x_5=0\\ 2x_1+6x_2-4x_3+5x_4+7x_5=0\\ x_1+3x_2-4x_3+19x_5=0\end{cases}$ 的一般解。

(5) λ 取何值时，非齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$$

①有唯一解；②无解；③有无穷多个解。

答案

1．(1) B (2) C (3) B (4) D (5) D

2．(1) $-6,-3$

(2) $\begin{pmatrix}6 & -2\\ 4 & 7\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}5 & 0\\ 5 & 10\end{pmatrix}$

(3) $24,3,-3$

(4) $\begin{pmatrix}3 & -6\\ 9 & -9\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-1 & \frac{2}{3}\\ -1 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

(5) 3

3．(1) × (2) √ (3) × (4) × (5) ×

4.（1）①$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{10} & -\frac{1}{10}\\ \frac{2}{10} & -\frac{4}{10}\end{pmatrix}$；②$10\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ -8 & 0\end{pmatrix}$

（2）$\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

（3）$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-6 & 1 & 4\\ -3 & 1 & 2\\ 5 & -1 & -3\end{pmatrix}$

（4）$\begin{cases}x_1=-3x_2+57x_5\\ x_3=19x_5\\ x_4=-9x_5\end{cases}$　（其中 x_2, x_5 为自由未知量）

（5）①$\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-2$；②$\lambda=-2$；③$\lambda=1$

第3章

向量组的线性相关性

3.1 基本要求

(1) 理解 n 维向量、n 维向量空间的概念，向量的线性组合和线性表示的定义。

(2) 熟练掌握向量组的线性相关与线性无关的判定方法。

(3) 熟练掌握计算向量组的极大线性无关组和向量组的秩的方法，理解向量组的秩与矩阵的秩之间的关系。

(4) 了解线性方程组的基础解系、通解等概念及解的结构，熟练掌握求线性方程组通解的方法。

3.2 内容提要

1. n 维向量的定义

由实数域上的 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的有序数组，称为 n 维向量。一般用小写希腊字母 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \cdots$ 表示。记作

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad 或 \quad \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

其中，数 a_i 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 i 个分量 $(i=1,2,\cdots,n)$；分量的个数称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的维数。

2. 向量的线性运算

设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$，则有

(1) 加法：$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$

(2) 减法：$\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} + (-\boldsymbol{\beta}) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \cdots, a_n - b_n)$

(3) 数乘：$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$

3. 向量的运算规律

设$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，$\boldsymbol{\gamma}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，$k$，$l$ 是实数：

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$

(3) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{\alpha}$

(4) $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{O}$

(5) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$

(6) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$

(7) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$

(8) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$

4. 线性组合

设有 n 维向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$，若存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

成立，称向量$\boldsymbol{\beta}$为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合，或称$\boldsymbol{\beta}$可由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示。

5. 线性相关与线性无关

设有 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，若存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{O}$$

成立，称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，否则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关。

6. 向量间线性关系定理

(1) n 个 n 维向量$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})(i=1,2,\cdots,n)$线性相关的充分必要条件是行列式

$$\det\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

(2) 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关的充分必要条件是向量组中至少有一个向量是其余 $m-1$ 个向量的线性组合。

(3) 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$线性相关，且$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，则$\boldsymbol{\beta}$ 可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，且表示式唯一。

(4) 如果向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，其中$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})(i=1,2,\cdots,m)$，那么在每个向量上任意添加一个分量得到的 $n+1$ 维向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 也线性无关。

7. 极大无关组

若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r(r\leqslant s)$满足：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关。

（2）在$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 中再添加原向量组中任何一个向量所得到的向量组都线性相关，则称$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极大无关部分组，简称极大无关组。

8. 向量组的秩

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的极大无关组所含向量的个数称为向量组的秩，记作

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$$

（1）等价的向量组有相同的秩。

（2）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行（列）向量组的秩。

9. 齐次线性方程组解的结构

（1）若 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的解，则 $\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2$ 也是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的解。

（2）若 $\boldsymbol{X}_1$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的解，c 是任意常数，则 $c\boldsymbol{X}_1$ 也是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的解。

（3）若 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_m$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的解，则其线性组合 $k_1\boldsymbol{X}_1+k_2\boldsymbol{X}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{X}_m$ 也是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的解，其中 $k_i(i=1,2,\cdots,m)$是任意常数。

（4）若 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_{n-r}$就是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的一个基础解系，且方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的全部解（又称通解）为：$c_1\boldsymbol{X}_1+c_2\boldsymbol{X}_2+\cdots+c_{n-r}\boldsymbol{X}_{n-r}$（$c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$是任意常数）。

10. 非齐次线性方程组解的结构

（1）如果 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的两个解，则 $\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2$ 是其导出组的解。

（2）如果 $\boldsymbol{X}_1$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解，$\boldsymbol{X}_0$ 是其导出组的解，则 $\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_0$ 是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解。

（3）非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的任一个解 $\boldsymbol{X}$ 都可以表示成：$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^*+\boldsymbol{X}_0$，其中 $\boldsymbol{X}_0$ 是导出组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一个解，$\boldsymbol{X}^*$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一个解（通常称 $\boldsymbol{X}^*$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的特解）。

（4）若 $\boldsymbol{X}^*$ 是线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_{n-r}$是其导出组的一个基础解系，那么 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的任一个解 $\boldsymbol{X}$ 都可以表示成 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^*+c_1\boldsymbol{X}_1+c_2\boldsymbol{X}_2+\cdots+c_{n-r}\boldsymbol{X}_{n-r}$（$c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$是任意常数），其中，$n$ 为未知量的个数，r 为系数矩阵的秩。

3.3　学习要点

本章的重点是求线性方程组通解。理解线性组合与线性表示的概念，向量、向量组与矩阵之间的联系，将线性方程组用向量表示；理解向量组线性相关、线性无关的概念，会判定向量组的线性相关性；理解极大无关组与向量组的秩的概念，熟练掌握求解极大无关组与向量组的秩的方法；理解线性方程组的基础解系、通解等概念及解的结构，熟练掌握求线性方程组通解的方法。

3.4 例题增补

例 3-1 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(a,3,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,b,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(2,3,1)^{\mathrm{T}}$的秩为2，求 a,b。

分析 求向量组的秩可以利用矩阵的秩来确定，只要将所给的向量按一定的顺序构成一个矩阵即可求解。但本题向量中的元素含有常数，要注意排列的顺序。

解 因为

$$(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=\begin{pmatrix}1&2&a&2\\2&3&3&b\\1&1&1&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&a-1&-1\\0&1&1&b-6\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&a-1&-1\\0&0&2-a&b-5\end{pmatrix}$$

而 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=2$，所以 $a=2,b=5$。

例 3-2 求下列向量组的一个极大无关组。

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(6,4,1,-1,2)$$
$$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,2,3,-4)$$
$$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,4,-9,-16,22)$$
$$\boldsymbol{\alpha}_4=(7,1,0,-1,3)$$

分析 利用矩阵及初等变换可以求向量组的极大无关组，并将其余向量用极大无关组线性表示。具体方法如下。

(1) 将向量组中各向量写成列向量，构成矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}})$。

(2) 对所构成的矩阵施行初等行变换，将矩阵化为行简化阶梯形矩阵。

(3) 在行简化阶梯形矩阵中，列单位向量所在列对应的向量是向量组的一个极大无关组。

解 将向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 分别转置为列向量，构成矩阵 $\boldsymbol{A}$，将 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}6&1&1&7\\4&0&4&1\\1&2&-9&0\\-1&3&-16&-1\\2&-4&22&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-5&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 的 1,2,4 列是 $\boldsymbol{A}$ 的列的一个极大无关组，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是原向量组的一个极大无关组。

例 3-3 设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 s 个解，$k_1,k_2,\cdots,k_s$ 为实数，满足$k_1+k_2+\cdots+k_s=1$。证明 $\boldsymbol{x}=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$ 也是它的解。

分析 若 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_s$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的解，则 $k_1\boldsymbol{X}_1+k\boldsymbol{X}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{X}_s$ 也是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的解；但是若 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_s$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解，则 $k_1\boldsymbol{X}_1+k\boldsymbol{X}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{X}_s$ 未必是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解，除非加上一定的条件限定。

证明 由于 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 s 个解。故有

$$\boldsymbol{A}\eta_i=\boldsymbol{b}\quad(i=1,2,\cdots,s)$$

而 $\boldsymbol{A}(k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s)=k_1\boldsymbol{A}\eta_1+k_2\boldsymbol{A}\eta_2+\cdots+k_s\boldsymbol{A}\eta_s=\boldsymbol{b}(k_1+k_2+\cdots+k_s)=\boldsymbol{b}$

即 $$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\quad(\boldsymbol{x}=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s)$$
从而 $\boldsymbol{x}$ 也是方程的解。

证毕。

例 3-4 求一个齐次线性方程组，使它的基础解系为 $\boldsymbol{X}_1=(0,1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}_2=(3,2,1,0)^{\mathrm{T}}$。

分析 常见的方法是先给出一个齐次线性方程组，然后求它的基础解系。本题特殊在先给出一个齐次线性方程组的基础解系，然后再求此齐次线性方程组。

解 显然，原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix}$$

其中，c_1,c_2 为任意常数。即

$$\begin{cases}x_1=3c_2\\x_2=c_1+2c_2\\x_3=2c_1+c_2\\x_4=3c_1\end{cases}$$

消去 c_1,c_2 得

$$\begin{cases}2x_1-3x_2+x_4=0\\x_1-3x_3+2x_4=0\end{cases}$$

此即所求的齐次线性方程组。

例 3-5 设有线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda\\x_1+x_2+(1-2\lambda-\lambda^2)x_3=3-\lambda-\lambda^2\\\lambda x_2-\lambda x_3=3-\lambda\end{cases}$$

问 λ 取何值时，方程组有唯一解、无解、有无穷多解？在有无穷多解时求其通解。

分析 本题综合性比较强，综合了线性方程组解的判定定理及线性方程组通解的求法等。

解 用初等行变换转换增广矩阵为行阶梯形

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda&\lambda\\1&1&1-2\lambda-\lambda^2&3-\lambda-\lambda^2\\0&\lambda&-\lambda&3-\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda&\lambda\\0&\lambda&-\lambda&3-\lambda\\0&0&-\lambda(\lambda+3)&(1-\lambda)(3+\lambda)\end{pmatrix}$$

由此可知：

(1) 当 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq-3$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=3$，方程组有唯一解。

(2) 当 $\lambda=0$ 时，$r(\boldsymbol{A})=1$，$r(\boldsymbol{B})=2$，$r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{B})$，方程组无解。

(3) 当 $\lambda=-3$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=2$，方程组有无穷多个解。

此时，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&-2&-3\\1&1&-2&-3\\0&-3&3&6\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 有同解方程组 $\begin{cases}x_1=-1+x_3\\x_2=-2+x_3\end{cases}$，

解此方程组，得通解为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，其中 C 为任意常数。

3.5　教材部分习题解题参考

习题 3-1

1. 已知$\boldsymbol{\alpha}=(0,1,-1,3)$，$\boldsymbol{\beta}=(10,2,0,8)$，求$-\boldsymbol{\alpha}$，$-\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}$，$2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}$。

解　$2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}=2\cdot(0,1,-1,3)+3\cdot(10,2,0,8)=(0+30,2+6,-2+0,6+24)$
$=(30,8,-2,30)$

4. 已知$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,2)$，$\boldsymbol{\beta}=(3,2,7)$，且$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_2$，求 k。

解　由已知$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_2$，得 $k\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1$。因为

$$k\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1=(3,2,7)-(1,2,3)=(2,0,4)=2(1,0,2)=2\boldsymbol{\alpha}_2$$

所以，$k=2$。

习题 3-2

1. 设 $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4$，$\boldsymbol{b}_4=\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_1$，证明向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4$ 线性相关。

证明　设有 x_1,x_2,x_3,x_4 使得

$$x_1\boldsymbol{b}_1+x_2\boldsymbol{b}_2+x_3\boldsymbol{b}_3+x_4\boldsymbol{b}_4=\boldsymbol{O}$$

则

$$x_1(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)+x_2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)+x_3(\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4)+x_4(\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_1)=\boldsymbol{O}$$
$$(x_1+x_4)\boldsymbol{a}_1+(x_1+x_2)\boldsymbol{a}_2+(x_2+x_3)\boldsymbol{a}_3+(x_3+x_4)\boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{O}$$

(1) 若 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 线性相关，则存在不全为零的数 k_1,k_2,k_3,k_4，有

$$\begin{cases}k_1=x_1+x_4\\k_2=x_1+x_2\\k_3=x_2+x_3\\k_4=x_3+x_4\end{cases}$$

由 k_1,k_2,k_3,k_4 不全为零，知 x_1,x_2,x_3,x_4 不全为零，即 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4$ 线性相关。

(2) 若 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 线性无关，则

$$\begin{cases}x_1+x_4=0\\x_1+x_2=0\\x_2+x_3=0\\x_3+x_4=0\end{cases}$$

由系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

知此齐次方程存在非零解，则 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ 线性相关。

综合(1)、(2)即可得证。

证毕。

2. 设 $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_r$，且向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 线性无关，证明向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 线性无关。

证明 设 $k_1\boldsymbol{b}_1+k_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{b}_r=\boldsymbol{O}$，则

$$(k_1+\cdots+k_r)\boldsymbol{a}_1+(k_2+\cdots+k_r)\boldsymbol{a}_2+\cdots+(k_p+\cdots+k_r)\boldsymbol{a}_p+\cdots+k_r\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{O}$$

因向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 线性无关，故

$$\begin{cases} k_1+k_2+\cdots+k_r=0 \\ \qquad k_2+\cdots+k_r=0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad k_r=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

因为 $\begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$，故方程组只有零解。

即 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$，所以 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 线性无关。

证毕。

4. 讨论向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a,1,1), \boldsymbol{\alpha}_2=(1,a,-1), \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a)$ 的线性相关性。

解 不妨设所给向量为行向量的矩阵，记为 $\boldsymbol{A}$。由

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix}=a(a-1)(a+1)$$

可知：

(1) 当 $a=-1$，或 $a=0$，或 $a=1$ 时，$\det\boldsymbol{A}=0$，此时向量组线性相关。

(2) 当 $a\neq-1$，且 $a\neq 0$，且 $a\neq 1$ 时，$\det\boldsymbol{A}\neq 0$，此时向量组线性无关。

习题 3-3

1. 计算下列向量组的秩，并判断该向量组是否线性相关。

(2) $\boldsymbol{\beta}_1=(1,-3,2,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(-2,1,5,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(4,-3,7,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_4=(-1,-11,8,-3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_5=(2,-12,30,6)^{\mathrm{T}}$。

解 $(\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3\quad\boldsymbol{\beta}_4\quad\boldsymbol{\beta}_5)$

$$=\begin{pmatrix}1&-2&4&-1&2\\-3&1&-3&-11&-12\\2&5&7&8&30\\-1&3&1&-3&6\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+r_1]{\substack{r_2+3r_1\\r_3-2r_1}}\begin{pmatrix}1&-2&4&-1&2\\0&-5&9&-14&-6\\0&9&-1&10&26\\0&1&5&-4&8\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&-2&4&-1&2\\0&1&5&-4&8\\0&9&-1&10&26\\0&-5&9&-14&-6\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{r_3-9r_2\\r_4+5r_2}}\begin{pmatrix}1&-2&4&-1&2\\0&1&5&-4&8\\0&0&-46&46&-46\\0&0&34&-34&34\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\times\left(-\frac{1}{46}\right)}\begin{pmatrix}1&-2&4&-1&2\\0&1&5&-4&8\\0&0&1&-1&1\\0&0&34&-34&34\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4-34r_3}\begin{pmatrix}1&-2&4&-1&2\\0&1&5&-4&8\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

该向量组的秩为3,小于向量的个数5,所以线性相关。

2. 设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,4,\lambda)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,\lambda,1)^{\mathrm{T}}$。

(1) λ取何值时,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关?$\lambda$取何值时,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关?为什么?

(2) λ取何值时,$\boldsymbol{\alpha}_3$能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示?

解 (1) $(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&\lambda\\-1&\lambda&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&1\\0&\lambda+2&2\\0&0&\lambda-2\end{pmatrix}$

当$\lambda\neq2$,且$\lambda\neq-2$时,矩阵的秩为3,与向量个数相同,所以此时该向量组线性无关。

当$\lambda=2$,或$\lambda=-2$时,矩阵的秩为2,小于向量个数,所以此时向量组线性相关。

(2) 当$\lambda=2$时,$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$,此时$\boldsymbol{\alpha}_3$能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示。

当$\lambda=-2$时,$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=1,r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$,两者不相等,所以$\boldsymbol{\alpha}_3$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示。

当$\lambda\neq2$,且$\lambda\neq-2$时,$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=2,r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$,两者不相等,所以$\boldsymbol{\alpha}_3$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示。

3. 求下列向量组的秩与一个极大线性无关组。

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,2,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_5=(2,1,5,6)^{\mathrm{T}}$。

解 $(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\alpha}_4\quad\boldsymbol{\alpha}_5)=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&6\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&3&0&1\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

该向量组的秩为 3，且$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为它的一个极大线性无关组。

习题 3-4

1. 求下列齐次线性方程组的一个基础解系，并用基础解系表示出全部解。

(2) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+4x_4-3x_5=0\\2x_1+x_2+3x_3+5x_4-5x_5=0\\x_1-x_2+3x_3-2x_4-x_5=0\\3x_1+x_2+5x_3+6x_4-7x_5=0\end{cases}$

解 对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行一系列的初等行变换：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\2&1&3&5&-5\\1&-1&3&-2&-1\\3&1&5&6&-7\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\0&-1&1&-3&1\\0&-2&2&-6&2\\0&-2&2&-6&2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\0&-1&1&-3&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&1&-2\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

因为 $r(\boldsymbol{A})=2<5$，所以方程组有非零解，可得原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=-2x_3-x_4+2x_5\\x_2=x_3-3x_4+x_5\end{cases}$$

其中，x_3,x_4,x_5 为自由未知量。取$(x_3,x_4,x_5)^{\mathrm{T}}$ 分别为$(1,0,0)^{\mathrm{T}},(0,1,0)^{\mathrm{T}},(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，得到原方程组的一个基础解系为

$$\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{X}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

通解为

$$\boldsymbol{X}=C_1\boldsymbol{X}_1+C_2\boldsymbol{X}_2+C_3\boldsymbol{X}_3=C_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\\1\\0\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\quad(C_1,C_2,C_3\text{ 为任意常数})$$

2．求解下列方程组。

(1) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7 \\ 3x_1+x_2+2x_3+x_4-3x_5=-2 \\ 2x_2+x_3+2x_4+6x_5=23 \\ 8x_1+3x_2+4x_3+3x_4-x_5=12 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2 \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_1+2x_3+2x_4+6x_5=6 \\ 4x_1+5x_2+3x_3+3x_4-x_5=4 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4=2 \\ 2x_1+4x_2-2x_3+5x_4=1 \\ -x_1-2x_2+x_3-x_4=4 \end{cases}$

解　(1) 利用初等行变换，将方程组的增广矩阵$(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{b})$转换为阶梯形矩阵，再求解。即

$$(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 6 & 23 \\ 8 & 3 & 4 & 3 & -1 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -2 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 3 & \frac{23}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

易见$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{b})=2<5$，所以原方程组有无穷多解，且原方程组的一般解为

$$\begin{cases} x_1=-\frac{1}{2}x_3+2x_5-\frac{9}{2} \\ x_2=-\frac{1}{2}x_3-x_4-3x_5+\frac{23}{2} \end{cases}$$

可以改写为

$$\begin{cases} x_1=-\frac{1}{2}x_3+0x_4+2x_5-\frac{9}{2} \\ x_2=-\frac{1}{2}x_3-x_4-3x_5+\frac{23}{2} \\ x_3=x_3+0x_4+0x_5+0 \\ x_4=0x_3+x_4+0x_5+0 \\ x_5=0x_3+0x_4+x_5+0 \end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\0\\0\end{pmatrix}x_3+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}x_4+\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\\1\end{pmatrix}x_5+\begin{pmatrix}-\frac{9}{2}\\\frac{23}{2}\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

所以原方程组的全部解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{9}{2}\\\frac{23}{2}\\0\\0\\0\end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\0\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

其中，C_1，C_2，C_3 为任意常数。

（2）利用初等行变换，将方程组的增广矩阵$(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{b})$转换为阶梯形矩阵再求解。即

$$(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&2\\2&3&1&1&-3&0\\1&0&2&2&6&6\\4&5&3&3&-1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&2&6&6\\0&1&-1&-1&-5&-4\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

易见 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{b})=2<5$，所以原方程组有无穷多解，且原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=-2x_3-2x_4-6x_5+6\\x_2=x_3+x_4+5x_5-4\end{cases}$$

可以改写为

$$\begin{cases}x_1=-2x_3-2x_4-6x_5+6\\x_2=x_3+x_4+5x_5-4\\x_3=x_3+0x_4+0x_5+0\\x_4=0x_3+x_4+0x_5+0\\x_5=0x_3+0x_4+x_5+0\end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}x_3+\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}x_4+\begin{pmatrix}-6\\5\\0\\0\\1\end{pmatrix}x_5+\begin{pmatrix}6\\-4\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

所以原方程组的全部解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-4\\0\\0\\0\end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}-6\\5\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

其中，C_1，C_2，C_3 为任意常数。

(3) 利用初等行变换，将方程组的增广矩阵 $(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b})$ 转换为阶梯形矩阵再求解。即

$$(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&2&-1&3&2\\2&4&-2&5&1\\-1&-2&1&-1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&3&2\\0&0&0&-1&-3\\0&0&0&2&6\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&-1&0&-7\\0&0&0&1&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

易见 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b})=2<4$，所以原方程组有无穷多解，且原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=-2x_2+x_3-7\\x_4=3\end{cases}$$

可以改写为

$$\begin{cases}x_1=-2x_2+x_3-7\\x_2=x_2+0x_3+0\\x_3=0x_2+x_3+0\\x_4=0x_2+0x_3+3\end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}x_3+\begin{pmatrix}-7\\0\\0\\3\end{pmatrix}$$

所以原方程组的全部解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\0\\0\\3\end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

其中，C_1，C_2 为任意常数。

总习题 3

1. 选择题。

(1) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的基础解系，那么基础解系还可以是(　　)。

A. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$

C. $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$　　D. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2$

(2) $r(\boldsymbol{A})=n$ 时，则 n 元线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$(　　)。

A. 无解　　B. 只有零解

C. 有无穷多个解　　D. 有非零解

(3) $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b})<n$ 时，则 n 元线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$(　　)。

A. 无解　　B. 有唯一解

C. 有无穷多个解　　D. 无法确定解的个数

(4) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{O},\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性(　　)。

A. 无法判定　　B. 无关

C. 相关　　D. 既相关，又无关

(5) 已知 n 维向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与 n 维向量组 $\boldsymbol{B}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha}_{s+1},\boldsymbol{\alpha}_{s+2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s+t}$，若 $r(\boldsymbol{A})=p$，$r(\boldsymbol{B})=q$，则下列条件中不能判定 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的极大无关组的是(　　)。

A. $p=q$，且 $\boldsymbol{B}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 线性表出

B. $s=q$，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是等价向量组

C. $p=q$，且 $\boldsymbol{A}$ 线性无关

D. $p=q=s$

2. 填空题。

(1) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,5,1,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(10,1,5,10)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(4,1,-1,1)$，且满足 $3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2=6\boldsymbol{\alpha}+5\boldsymbol{\alpha}_3$. 则 $\boldsymbol{\alpha}=$________。

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-1,3,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0,-2)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-5,3,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,3,t,0)$，则 $t=$________时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关。

(3) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,4,5)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,5,6)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,5,6,7)$，则该向量组的秩是________。

(4) 若 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=4$，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性________。

(5) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,4,5)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,5,6)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,5,6,7)$ 的一个极大无关组是________。

3. 判断题。

(1) 当 $r(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b})<n$ 时，则 n 元线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解。　　(　　)

(2) 等价的向量组有相同的秩。　　(　　)

(3) 若 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解，则 $\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2$ 也是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解。　　(　　)

(4) 对 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，若存在一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{O}$ 成立，则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关。　　(　　)

(5) 若 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_m$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的解，则其线性组合 $k_1\boldsymbol{X}_1+k_2\boldsymbol{X}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{X}_m$ 是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的全部解。　　(　　)

4. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\left(0,1,\frac{1}{2},1\right)$，求 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$。

5. 已知$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3+4\boldsymbol{\beta}=0$，其中$\boldsymbol{\alpha}_1=(5,-8,-1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,4,-3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-3,2,-5,4)$，求$\boldsymbol{\beta}$。

6. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$，求矩阵$\boldsymbol{A}$的列向量组的一个极大无关组，并将其余向量用极大无关组线性表示出来。

7. 求下列线性方程组的解。

(1) $\begin{cases}2x_1+x_2-2x_3+3x_4=0\\3x_1+2x_2-x_3+2x_4=0\\x_1+x_2+x_3-x_4=0\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x_1+x_2-3x_3-x_4=1\\3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4\\x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0\end{cases}$

答案

1. (1) B　(2) B　(3) C　(4) C　(5) A

2. (1) (1,2,3,4)　(2) 任意实数　(3) 2　(4) 无关　(5) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$

3. (1) ×　(2) √　(3) ×　(4) ×　(5) ×

4. 2

5. $\boldsymbol{\beta}=(0,1,2,-2)$

6. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为列向量组的一个极大无关组，且$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_5=4\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_4\end{cases}$

7. (1) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\xi_1+c_2\xi_2=c_1\begin{pmatrix}3\\-4\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-4\\5\\0\\1\end{pmatrix}$ （c_1,c_2 为任意常数）

(2) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{4}\\-\frac{1}{4}\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\\frac{7}{4}\\0\\1\end{pmatrix}$ （c_1,c_2 为任意常数）

第4章

相似矩阵及二次型

4.1 基本要求

(1) 了解向量的内积、长度、正交、规范正交基、正交矩阵等概念,了解施密特正交化方法。

(2) 掌握矩阵的特征值与特征向量的概念和求法,并了解其性质。

(3) 了解相似矩阵的概念和性质,知道矩阵可相似对角化的充要条件。

(4) 了解对称矩阵的特征值和特征向量的性质,掌握用正交矩阵将对称阵转换为对角阵的方法。

(5) 掌握二次型及其矩阵表示,了解二次型的秩;掌握用正交变换将二次型转换为标准形的方法。

(6) 掌握用配方法将二次型转换为规范形的方法,了解惯性定理。

(7) 掌握二次型的正定性及判别方法。

4.2 内容提要

1. 向量的内积、长度、正交

用 R^n 表示 n 维行向量空间,即

$$R^n = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid \forall x_i \in \mathbf{R}\}$$

两个 n 维行向量 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,$\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$的内积为

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

令

$$\| \boldsymbol{x} \| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$\| \boldsymbol{x} \|$ 称为 n 维行向量 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的长度(或范数)。

当 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时，称 $\boldsymbol{x}$ 为单位向量。

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in R^n$。如果 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$，则称 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 正交，记作 $\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$。

2. 正交向量组

如果一个向量组中不含零向量，且其中任意两个向量都是正交的（简称为两两正交），则称这个向量组为正交向量组。

设 $\boldsymbol{S}=\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_m\}(2\leqslant m\leqslant n)$，是 R^n 中的一个正交向量组，且其中每个向量都是单位向量，则称这个向量组为标准正交向量组。

若向量空间的一个基是正交向量组，则称这个基是正交基。

若向量空间的一个基是标准正交向量组，则称这个基是标准正交基或规范正交基。

正交向量组一定是线性无关组。

3. 正交矩阵

如果 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_n$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵。

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正交矩阵，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 是两个 n 维列向量，则称线性变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正交变换。

n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵的充分必要条件是：$\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量是标准正交向量组。

4. 特征值与特征向量

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶实型方阵。若存在某个数 λ 和某个 n 维非零列向量 $\boldsymbol{p}$ 使

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{p}$$

则称 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，称 $\boldsymbol{p}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的一个特征向量。

带参数 λ 的 n 阶方阵 $\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方阵，它的行列式 $|\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}|$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式。称 $|\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}|=0$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程。

求方阵多项式的特征值，只要求出 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值 λ，则 $f(\lambda)$ 一定是 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征值。

若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 λ^2 是 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值，$\frac{1}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值。

5. 相似矩阵

设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，若存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$$

则称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的相似矩阵，或说矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似。对 $\boldsymbol{A}$ 进行 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 变换称为对 $\boldsymbol{A}$ 进行相似变换，可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 称为把 $\boldsymbol{A}$ 变成 $\boldsymbol{B}$ 的相似变换矩阵。

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵，若存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵，也称 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化，简称 $\boldsymbol{A}$ 可对角化。

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个特征值，$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m$ 依次是与之对应的特征向量。

如果 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 各不相等，则 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m$ 线性无关。

若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式相同，从而其特征值相等。

若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 相似，则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值。

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量。

如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值各不相等，则 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似。

6. 对称矩阵的对角化

实对称矩阵的特征值一定是实数。特征向量一定是实向量。

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量一定是正交向量。

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称矩阵，λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的 r 重根，则 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=n-r$，从而对应的特征值 λ 恰有 r 个线性无关的特征向量。

对于任意一个 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，一定存在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}$$

对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 中的 n 个对角元 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值。反之，凡是正交相似于对角矩阵的实方阵一定是对称矩阵。

7. 二次型化标准形

n 元实二次型指的是含有 n 个未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的实系数二次齐次多项式：

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+\cdots+a_{nn}x_n^2\\&+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{1n}x_1x_n\\&+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n\\&+2a_{34}x_3x_4+\cdots+2a_{3n}x_3x_n\\&+\cdots+a_{n-1,n-1}x_{n-1}^2+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n\\=&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\quad(a_{ij}=a_{ji};\ i,j=1,2,\cdots,n)\end{aligned}$$

只含平方项的二次型称为二次型的标准形。

$$f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2$$

如果标准形的系数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 只在 $1,-1,0$ 三个数中取值，即能使二次型转换成

$$f=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$$

的形式，则称为二次型的规范形。

任给二次型 $f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j(a_{ij}=a_{ji})$，总存在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，使 f 化为标准形

$$f=\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+\cdots+\lambda_nx_n^2$$

则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 就是 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的特征值。

8. 惯性定理、正定二次型

惯性定理　任意一个 n 元二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，一定可以经过可逆线性变换转换为规范形

$$f=z_1^2+\cdots+z_k^2-z_{k+1}^2-\cdots-z_r^2$$

而且其中的 k 和 r 是由 $\boldsymbol{A}$ 唯一确定的(与所采用的变换的选择无关)。k 是规范形中系数为 1 的项数，r 就是 $\boldsymbol{A}$ 的秩。

规范形中的 k 称为二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$(或对称矩阵 $\boldsymbol{A}$)的正惯性指数，称 $r-k$ 为二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ (或对称矩阵 $\boldsymbol{A}$)的负惯性指数，$k-(r-k)=2k-r$ 称为它们的符号差。

设有二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，如果对任何 $x\neq 0$，都有 $f(x)>0$(显然 $f(0)=0$)，则称 f 为正定二次型，并称对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定的；如果对于任何 $x\neq 0$，都有 $f(x)<0$，则称 f 为负定二次型，并称对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是负定的。

n 元二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定的充分必要条件是：它的标准形的 n 个系数全为正，即它的规范形的 n 个系数全为 1，也即它的正惯性指数等于 n。

对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定的充分必要条件是：$\boldsymbol{A}$ 的特征值全为正。

对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定的充分必要条件是：$\boldsymbol{A}$ 的各阶主子式都为正，即

$$a_{11}>0,\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}>0,\cdots,\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}>0$$

对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为负定的充分必要条件是：奇数阶主子式为负，偶数阶主子式为正，即

$$(-1)^r\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1r}\\\vdots&&\vdots\\a_{r1}&\cdots&a_{rr}\end{vmatrix}>0\quad(r=1,2,\cdots,n)$$

这个定理称为赫尔维茨定理。

4.3　学习要点

对称矩阵的对角化问题是本章的一个重点。对称矩阵可相似对角化，也可合同对角化，求得正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，这样的对角化既相似，又合同。学好本章的关键之一是掌握对称矩阵正交相似对角化的原理和步骤，以及其他

概念，如向量的内积、长度、正交、施密特正交化过程、正交矩阵、特征值与特征向量等，这些都是学习对角化问题的需要，学习时要注重其之间的联系。

二次型化标准形是对称矩阵合同对角化的直接应用，必须掌握矩阵表示，这是用矩阵方法解决二次型问题的前提。二次型在解析几何、工程技术、经济学等各方面都有着广泛的应用，是一项很有用的知识，因此对于用配方法将二次型转换为标准形（规范形）及惯性定理，二次型的正定等知识需要掌握。

4.4 例题增补

例 4-1 已知正交单位向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$。

（1）求 $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 使 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是正交单位向量组。

（2）求一个以 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}$ 为第 1,2 列的正交矩阵。

分析 本题要先找出与已知向量线性无关的两个向量，然后用施密特正交化方法求得正交单位向量。

解 （1）由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是线性无关的，所以可取两个向量

$$\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,0,0),\quad \boldsymbol{\beta}_4=(0,0,1,0)$$

使 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关。

将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 正交化，得到一个正交向量组：

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_2=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_3=\boldsymbol{\beta}_3-\frac{(\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_1)}{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{(\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)}{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_3-\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0,0\right)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}_4&=\boldsymbol{\beta}_4-\frac{(\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\alpha}_1)}{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{(\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\alpha}_2)}{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)}\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\gamma}_3)}{(\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_3)}\boldsymbol{\gamma}_3\\&=\boldsymbol{\beta}_4-\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2=\left(0,0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

再将这些向量单位化，即得到一个正交单位向量组：

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_2=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0,0\right)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_4=\left(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

(2) 以$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}$作一个矩阵：

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

这个矩阵即为所求。

例 4-2　设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,求正交矩阵$\boldsymbol{P}$,使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$为对角矩阵。

分析　对称矩阵正交相似对角化的原理和步骤是本章的重点。本例完整地给出正交相似对角化的步骤,必须掌握其过程,明确每个步骤的必要性和依据。

解　首先求$\boldsymbol{A}$的特征值。因为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^3(\lambda-5)$$

所以$\boldsymbol{A}$的特征值为1(3重),5。

当$\lambda_1=1$时,把$\lambda_1=1$代入齐次线性方程组$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$,得

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

求得一个基础解系为$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$。

把它正交化,得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\-1\end{pmatrix}$$

再单位化，得

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6}\\-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{3}\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{6}\\-\frac{\sqrt{3}}{6}\\-\frac{\sqrt{3}}{6}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

当 $\lambda_2=5$ 时，把 $\lambda_2=5$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$，得

$$\begin{pmatrix}3&1&1&-1\\1&3&-1&1\\1&-1&3&1\\-1&1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

求得基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，再单位化得 $\boldsymbol{p}_4=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$。

$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{p}_4$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一组正交的单位向量，以它们为列作一个矩阵：

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{3}}{6}&\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{6}}{6}&-\frac{\sqrt{3}}{6}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{\sqrt{6}}{3}&-\frac{\sqrt{3}}{6}&-\frac{1}{2}\\0&0&-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{P}$ 是一个正交矩阵，而且有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(1,1,1,5)$$

例 4-3　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$。

分析　本例的目的是掌握用矩阵对角化理论计算矩阵的幂次多项式，若 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，则 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\mathrm{diag}(\lambda_1^k,\cdots,\lambda_n^k)\boldsymbol{P}^{-1}$。

解　$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$是对称矩阵，因此可以对角化，即有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$，从而 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\mathrm{diag}(\lambda_1^k,\cdots,\lambda_n^k)\boldsymbol{P}^{-1}$。

由 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1\\1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)$，可得 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$的特征值

$$\lambda_1=1,\quad \lambda_2=3$$

所以，

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\Lambda}^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&3^n\end{pmatrix}$$

对应特征值 $\lambda_1=1$ 的特征向量为$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$。

对应特征值 $\lambda_2=3$ 的特征向量为$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$。

并且 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1|\boldsymbol{\xi}_2)=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$。可求出 $\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$。从而有

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+3^n&1-3^n\\1-3^n&1+3^n\end{pmatrix}$$

例 4-4　设二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{pmatrix}$，用正交变换把它转换为标准形。

分析　本题的目的是掌握用矩阵形式给出二次型的方法，要求必须熟练掌握二次型的矩阵表示。

解　先求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程和特征值：

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1&1\\-1&\lambda&1&-1\\-1&1&\lambda&-1\\1&-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&-1&-1&1\\1&\lambda&1&-1\\1&1&\lambda&-1\\1&-1&-1&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&-1&-1&1\\0&\lambda+1&2&-2\\0&2&\lambda+1&-2\\0&0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda^2+2\lambda-3)$$

$$=(\lambda-1)^3(\lambda+3)=0$$

$\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为 $\lambda_1=-3,\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$。

属于 $\lambda_1=-3$ 的特征向量满足：

$$\begin{cases}-3x_1-x_2-x_3+x_4=0\\-x_1-3x_2+x_3-x_4=0\\-x_1+x_2-3x_3-x_4=0\\x_1-x_2-x_3-3x_4=0\end{cases}$$

可取单位特征向量 $\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$。

其求解方法是：把前两式相加得 $x_1+x_2=0$；把后两式相加得 $x_3+x_4=0$；把中间两式相减得 $x_2=x_3$；于是 $-x_1=x_2=x_3-x_4$。

属于三重根 $\lambda_2=1$ 的特征向量满足 $x_1-x_2-x_3+x_4=0$。用直观法即可求出三个两两正交解(然后再单位化)：

$$\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_4=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

于是，找到正交矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 后，原二次型化为标准形 $f=-3y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2$。

4.5 教材部分习题解题参考

习题 4-1

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}$，用施密特方法把这组向量正交化。

解
$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\frac{6}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}-\frac{14}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{8}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

3. 下列方阵是否为正交矩阵？说明理由。

(1) $\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{2}&-1\end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix}\frac{1}{9}&-\frac{8}{9}&-\frac{4}{9}\\-\frac{8}{9}&\frac{1}{9}&-\frac{4}{9}\\-\frac{4}{9}&-\frac{4}{9}&\frac{7}{9}\end{pmatrix}$

解　(1) 不是，因为第 1 个列向量不是单位向量。

(2) 是，因为此矩阵的 3 个列向量构成规范正交基，即它们两两正交，并且都是单位向量。

习题 4-2

1. 求下列矩阵的特征值与特征向量。

(1) $\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$

解　$\boldsymbol{A}$ 的特征方阵为 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda+1&-1&0\\4&\lambda-3&0\\-1&0&\lambda-2\end{pmatrix}$。$\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-1&0\\4&\lambda-3&0\\-1&0&\lambda-2\end{vmatrix}=-(\lambda-2)(\lambda-1)^2=0$$

可得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2$。

用来求特征向量的齐次线性方程组为

$$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\lambda+1&-1&0\\4&\lambda-3&0\\-1&0&\lambda-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$$

属于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量 $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$满足$\begin{cases}-2x_1-x_2=0\\-4x_1+2x_2=0\\x_1+x_3=0\end{cases}$，可求出特征向量 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$。

属于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量全体为 $\{k\boldsymbol{p}_1\mid k\in R \text{ 且 } k\neq 0\}$。

属于 $\lambda_3=2$ 的特征向量 $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$满足$\begin{cases}-3x_1+x_2=0\\-4x_1+x_2=0\\x_1=0\end{cases}$，可求出特征向量 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$。

属于 $\lambda_3=2$ 的特征向量全体为$\{k\boldsymbol{p}_2 \mid k\in R$ 且 $k\neq 0\}$。

2. 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,2,3,求 $\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2+7\boldsymbol{A}$ 的特征值。

解 令 $\varphi(\lambda)=\lambda^3-5\lambda^2+7\lambda$。因 1,2,3 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,从而 $\varphi(1)=3,\varphi(2)=2,\varphi(3)=3$ 是$\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2+7\boldsymbol{A}$ 的特征值。

3. 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,2,−3,求$|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}|$。

解 由特征值性质得$|\boldsymbol{A}|=1\times 2\times(-3)=-6$,知 $\boldsymbol{A}$ 可逆,从而 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=-6\boldsymbol{A}^{-1}$,有

$$\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=-6\boldsymbol{A}^{-1}+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$$

令 $\varphi(\lambda)=-6\lambda^{-1}+3\lambda+2$。因为 1,2,−3 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,从而 $\varphi(1)=-1,\varphi(2)=5,\varphi(-3)=-5$ 是 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$ 的特征值,即

$$|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}|=-1\times 5\times(-5)=25$$

习题 4-3

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&x\\1&0&0\end{pmatrix}$,当 x 为何值时,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能对角化?

解 由$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\-1&\lambda-1&-x\\1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)^2$ 得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=1,\quad \lambda_3=-1$$

对应单根 $\lambda_3=-1$,可求得线性无关的特征向量恰有 1 个,因此矩阵可对角化的充分必要条件是对应重根 $\lambda_1=\lambda_2=1$,有两个线性无关的特征向量,即方程$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$ 有两个线性无关的解,亦即 $r(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=1$。由于

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&0&-x\\-1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&1+x\\0&0&0\end{pmatrix}$$

要使 $r(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=1$,则 $1+x=0$,即 $x=-1$。

因此,当 $x=-1$ 时,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能对角化。

习题 4-4

1. 求出 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$的正交相似标准形。

解 由$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}-\lambda&-1&1\\-1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_1=-2,\quad \lambda_2=\lambda_3=1$$

属于 $\lambda_1=-2$ 的特征向量满足 $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=0\\-x_1+2x_2+x_3=0\\x_1+x_2+2x_3=0\end{cases}$，取单位解向量 $\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$。

属于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量满足 $\begin{cases}-x_1-x_2+x_3=0\\-x_1-x_2+x_3=0\\x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$，取单位解向量

$$\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵，且有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}$$

2. 求出 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\-2 & 1 & -2\\0 & -2 & 0\end{pmatrix}$ 的正交相似标准形。

解　由 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -2 & 0\\-2 & 3 & -2\\0 & -2 & 2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(4-\lambda)(\lambda+2)$ 求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_1=-2,\quad \lambda_2=1,\quad \lambda_3=4$$

属于 $\lambda_1=-2$ 的特征向量满足 $\begin{cases}4x_1-2x_2=0\\-2x_1+3x_2-2x_3=0\\-2x_2+2x_3=0\end{cases}$，取单位解向量 $\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$。

属于 $\lambda_2=1$ 的特征向量满足 $\begin{cases}x_1-x_2=0\\-2x_1-2x_3=0\\-2x_2-x_3=0\end{cases}$，取单位解向量 $\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$。

属于 $\lambda_3=4$ 的特征向量满足 $\begin{cases}-2x_1-2x_2=0\\-2x_1-3x_2-2x_3=0\\-2x_2-4x_3=0\end{cases}$，取单位解向量 $\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$。

令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\2 & 1 & -2\\2 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵，且有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 4\end{pmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}$$

习题 4-5

2. 用正交变换转换 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$ 为标准形。

解　二次型 f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

下面求一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角形。

$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-3 & 2\\ 0 & 2 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-5)$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_1=1,\quad \lambda_2=2,\quad \lambda_3=5$$

当 $\lambda_1=1$ 时，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$，即

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -2\\ 0 & -2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$。

当 $\lambda_2=2$ 时，解齐次线性方程组 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$，即

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$。

当 $\lambda_3=5$ 时，解齐次线性方程组 $(5\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$，即

$$\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $\boldsymbol{p}_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$。

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}$ 是正交矩阵。经过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，即

$$\begin{cases} x_1 = y_2 \\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3 \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3 \end{cases}$$

将 f 转换为标准形：

$$f = y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$$

习题 4-6

用配方法转换下列二次型为标准形，并写出所用变换的矩阵。

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_3^2+2x_1x_3+2x_2x_3$

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3$

解　(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$

$$=(x_1+x_2-2x_3)^2-x_2^2-4x_3^2+4x_2x_3+3x_2^2+5x_3^2$$
$$=(x_1+x_2-2x_3)^2+2x_2^2+x_3^2+4x_2x_3$$
$$=(x_1+x_2-2x_3)^2+2(x_2+x_3)^2-x_3^2$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2-2x_3 \\ y_2=\sqrt{2}(x_2+x_3) \\ y_3=x_3 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x_1=y_1-\frac{1}{\sqrt{2}}y_2+3y_3 \\ x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}y_2-y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$，便可将二次型转换为标准形：

$$f(x) = f(Cy) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

所用的变换矩阵为

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 3 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_3^2+2x_1x_3+2x_2x_3$

$$=(x_1+x_3)^2+x_3^2+2x_2x_3$$
$$=(x_1+x_3)^2-x_2^2+(x_2+x_3)^2$$

令$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_2 + x_3 \end{cases}$，即$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = -y_2 + y_3 \end{cases}$，便可将二次型转换为标准形：

$$f(x) = f(Cy) = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$$

所用的变换矩阵为

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$

$$= 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_2x_3$$

$$= \left(\sqrt{2}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2\right)^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$$

$$= \left(\sqrt{2}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - \sqrt{2}x_3\right)^2 + (\sqrt{2}x_3)^2$$

令$\begin{cases} y_1 = \sqrt{2}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 \\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - \sqrt{2}x_3 \\ y_3 = \sqrt{2}x_3 \end{cases}$，即$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_3 \\ x_2 = \sqrt{2}y_2 + \sqrt{2}y_3 \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_3 \end{cases}$，便可将二次型化为标准形：

$$f(x) = f(Cy) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

所用的变换矩阵为

$$\boldsymbol{C} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

习题 4-7

判定下列二次型的正定性。

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$

(2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 9x_3^2 + 19x^4 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 - 6x_2x_4$

解　(1) 由于　$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$，　$a_{11} = -2 < 0$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 11 > 0,\quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -38 < 0$$

故 f 为负定。

(2) 由于
$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\-1&3&0&-3\\2&0&9&-6\\1&-3&-6&19\end{pmatrix}, a_{11}=1>0$$
$$\begin{vmatrix}1&-1\\-1&3\end{vmatrix}=4>0,\quad \begin{vmatrix}1&-1&2\\-1&3&0\\2&0&9\end{vmatrix}=6>0,\quad |A|=24>0$$
故 f 为正定。

总习题 4

1. 选择题。

(1) 若二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为$-2,9$，则 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为(　　)。

A. $2,-9$　　B. $-2,9$　　C. $-2,-9$　　D. $2,9$

(2) 若二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$-1,1$，则 $3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$ 的特征值为(　　)。

A. $2,-4$　　B. $-2,4$　　C. $-4,-2$　　D. $2,4$

(3) 若二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为$-1,2$，则$|\boldsymbol{B}|$为(　　)。

A. -2　　B. -1　　C. 2　　D. 1

(4) 若 λ 为四阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式的三重根，则 $\boldsymbol{A}$ 对应于 λ 的特征向量最多有(　　)个线性无关。

A. 3　　B. 1　　C. 2　　D. 4

(5) 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，且二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定，则下列结论不正确的是(　　)。

A. $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为正　　B. $\boldsymbol{A}$ 的一切顺序主子式全为正

C. $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上的元素全为正　　D. 对一切 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 全为正

2. 填空题。

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，且 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，则$|\boldsymbol{A}|=$________。

(2) 判别二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$ 是否正定________。

(3) 若二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为-1 和 1，则$|\boldsymbol{A}|=$________。

(4) 用矩阵记号表示 $f=x^2+4xy+4y^2+2xz+z^2+4yz$ ________。

(5) 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&0\\ 0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$是否为正交矩阵________。

3. 判断题。

（1）若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，则 $\boldsymbol{A}$ 一定有 n 个互不相等的特征值。（　　）

（2）若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式和特征值都相同。（　　）

（3）矩阵的特征值对应的特征向量是唯一的。（　　）

（4）若三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 能对角化。（　　）

（5）若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是正交矩阵，$\boldsymbol{AB}$ 未必是正交矩阵。（　　）

4. 计算题。

（1）试用施密特法把向量组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ 正交化。

（2）求下列矩阵的特征值和特征向量。

① $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$　　② $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 3 & 6\end{pmatrix}$

（3）用矩阵记号表示下列二次型。

① $f=x^2+y^2-7z^2-2xy-4xz-4yz$

② $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3-2x_1x_4+6x_2x_3-4x_2x_4$

（4）将下列二次型化成标准形。

① $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$

② $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_3x_4$

（5）判别下列二次型的正定性。

① $f=-2x^2-6y^2-4z^2+2xy+2xz$

② $f=x_1^2+3x_2^2+9x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3$

答案

1. （1）B　（2）A　（3）A　（4）A　（5）D

2. （1）1

（2）是

（3）-1

（4）$(x,y,z)\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

（5）是

3. （1）×　（2）√　（3）×　（4）×　（5）×

4. （1）根据施密特正交化方法，令

$$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-\frac{(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3-\frac{(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1-\frac{(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_2)}{(\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2)}\boldsymbol{b}_2=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\3\\3\\4\end{pmatrix}$$

故正交化后得

$$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{3}&-\frac{1}{5}\\0&-1&\frac{3}{5}\\-1&\frac{2}{3}&\frac{3}{5}\\1&\frac{1}{3}&\frac{4}{5}\end{pmatrix}$$

(2) ① 特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=3,\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

② 特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=-1,\lambda_3=9,\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

(3) ① $f=(x,y,z)\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-1&1&-2\\-2&-2&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

② $f=(x_1,x_2,x_3,x_4)\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\-1&1&3&-2\\2&3&1&0\\-1&-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$

(4) ① $f=2y_1^2+5y_2^2+y_3^2$

② $f=-y_1^2+3y_2^2+y_3^2+y_4^2$

(5) ① f 为负定

② f 为正定

第5章

线性代数应用简介

5.1　基本要求

(1) 理解投入产出模型的概念；了解直接消耗系数及其矩阵、完全消耗系数及其矩阵的性质。

(2) 掌握消耗平衡方程组及分配平衡方程组的解法；能根据实际问题编制投入产出表。

(3) 了解线性规划问题数学模型的一般形式、标准形式；了解线性规划问题的几个基本概念和单纯形表的结构。

(4) 掌握将线性规划问题数学模型的一般形式转换为标准形式的方法、线性规划问题的解的判别方法、单纯形方法；会建立线性规划问题的数学模型。

5.2　内容提要

1. 价值型投入产出模型的定义与记号

假设一个经济系统是由 n 个生产消费部门组成的，在利用投入产出方法进行经济活动分析和计划工作前，首先要根据某一年份的实际统计资料，将这 n 个生产消费部门以及它们之间的数量依存关系按一定顺序编制一张投入产出表。如果这些统计数据是以货币为统一价值单位，则称其为价值型投入产出表，如表 5-1 所示。

表 5-1 的水平方向反映各部门产品按经济用途的使用情况。

各部门产品可分为中间产品和最终产品两大部分。中间产品是指在生产领域中尚须进一步加工的产品，最终产品是指在生产领域中已经最终加工完毕，可供社会消费和使用的产品。

表 5-1 的垂直方向反映各部门产品的价值构成。

表 5-1 价值型投入产出表

产出 / 部门间流量 / 投入		中间产品				最终产品	总产出
		1	2	$\cdots$	n		
中间投入	1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1n}	y_1	x_1
	2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2n}	y_2	x_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	n	x_{n1}	x_{n2}	$\cdots$	x_{nn}	y_n	x_n
初始投入		z_1	z_2	$\cdots$	z_n		
总投入		x_1	x_2	$\cdots$	x_n		

各部门产品的价值由中间投入和初始投入两部分组成。中间投入是指各部门对某一部门投入的中间产品数量,即该部门在生产过程中所消耗的中间产品数量;初始投入是指各部门固定资产和劳动力等投入的数量。

表 5-1 中 x_i 表示第 i 个部门的总产出或总投入;y_i 表示第 i 个部门的最终产品数量;x_{ij} 表示第 j 个部门在生产过程中消耗第 i 部门中间投入数量或第 i 部门分配给第 j 部门的中间产品数量,也称为部门间的流量;z_j 表示第 j 部门的初始投入。

表 5-1 的前 n 行组成了一个横向长方形表,横向长方形表的每一行都表示一个等式,即

$$\begin{cases} x_1 = x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} + y_1 \\ x_2 = x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} + y_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ x_n = x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{nn} + y_n \end{cases} \tag{5-1}$$

或简写为

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{5-2}$$

式(5-1)和式(5-2)都称为分配平衡方程组。

表 5-1 中前 n 列组成了一个竖向长方形表,竖向长方形表的每一列都表示一个等式,即

$$\begin{cases} x_1 = x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{n1} + z_1 \\ x_2 = x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{n2} + z_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ x_n = x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{nn} + z_n \end{cases} \tag{5-3}$$

或简写为

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + z_j \quad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{5-4}$$

式(5-3)和式(5-4)都称为消耗平衡方程组。

分配平衡方程组和消耗平衡方程组统称为投入产出平衡方程组。

2. 直接消耗系数

(1) 定义。第 j 部门生产单位产品直接消耗第 i 部门的产品量，称为第 j 部门对第 i 部门的直接消耗系数，记作 a_{ij}，即

$$a_{ij}=\frac{x_{ij}}{x_j}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)\tag{5-5}$$

各部门之间的直接消耗系数构成的 n 阶矩阵，称为直接消耗系数矩阵，记作

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_n$$

由式(5-5)得

$$x_{ij}=a_{ij}x_j\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

代入分配平衡方程组，得

$$\begin{cases}x_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+y_1\\x_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+y_2\\\qquad\qquad\vdots\\x_n=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n+y_n\end{cases}$$

或简写为

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+y_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

代入分配平衡方程组，得

$$\begin{cases}x_1=a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{n1}x_n+z_1\\x_2=a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{n2}x_n+z_2\\\qquad\qquad\vdots\\x_n=a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{nn}x_n+z_n\end{cases}$$

或简写为

$$x_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_j+z_j\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

分配平衡方程组和消耗平衡方程组的矩阵表示为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{Y}\qquad\text{或}\qquad(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$$
$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CX}+\boldsymbol{Z}\qquad\text{或}\qquad(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Z}$$

其中：

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n}a_{i1}&0&\cdots&0\\0&\sum_{i=1}^{n}a_{i2}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\sum_{i=1}^{n}a_{in}\end{pmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{C}$ 称为中间投入系数矩阵。

(2) 直接消耗系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有以下性质。

① 所有元素均非负，且 $0 \leqslant a_{ij} < 1(i,j=1,2,\cdots,n)$。

② 各列元素的绝对值之和均小于1，即 $\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| < 1(j=1,2,\cdots,n)$。

3. 平衡方程组的解

1) 消耗平衡方程组的解

若直接消耗系数 a_{ij} 是已知的数值，将其代入消耗平衡方程组，得到

$$\left(1-\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right) x_j = z_j \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

则上式中的两组未知量 x_j，z_j 中，只须知道其中一组数值，即可求出另一组未知量的数值。

(1) 若已知 x_j 的数值，则求 z_j 值的公式为

$$z_j = \left(1-\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right) x_j \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

或表示为矩阵运算公式

$$\boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{X}$$

(2) 若已知 z_j 的数值，则求 x_j 值的公式为

$$x_j = \left(1-\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right)^{-1} z_j \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

或表示为矩阵运算公式

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{Z}$$

2) 分配平衡方程组的解

若直接消耗系数 a_{ij} 是已知数值，将其代入分配平衡方程组，得线性方程组

$$\begin{cases} (1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n = y_1 \\ -a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 - \cdots - a_{2n}x_n = y_2 \\ \qquad\vdots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - (1-a_{nn})x_n = y_n \end{cases}$$

用矩阵表示为

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}$$

有以下两种情况：

(1) 若已知 x_j 的数值，则求 y_i 值的矩阵运算公式为

$$\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}$$

(2) 若已知 y_i 的数值，则求 x_j 值的矩阵运算公式为

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{Y}$$

4. 完全消耗系数

第 j 部门生产单位产品时对第 i 部门产品量的完全消耗的产品量，称为第 j 部门对第 i 部门的完全消耗系数，记作 b_{ij}，即

$$b_{ij}=a_{ij}+\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{kj}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)\tag{5-6}$$

其中，$\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{kj}$ 表示间接消耗的总和。

各部门之间的完全消耗系数构成的 n 阶矩阵，称为完全消耗系数矩阵，记作

$$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_n$$

此时，公式(5-6)的矩阵表示式为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BA}$$

由矩阵运算

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}-(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}-\boldsymbol{I}$$

得到完全消耗系数的计算公式为

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}-\boldsymbol{I}$$

5. 线性规划问题的数学模型

1）一般形式

求取一组变量 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$，使之既满足线性约束条件，又使线性的目标函数取得极值的一类最优化问题，称为线性规划问题。

线性规划问题可用数学语言描述如下。

目标函数：
$$\max(\text{或}\ \min)S=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

约束条件：
$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant(=,\geqslant)b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant(=,\geqslant)b_2\\\qquad\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant(=,\geqslant)b_m\\x_j\geqslant0\quad(j=1,2,\cdots,n)\end{cases}\tag{5-7}$$

其中，$a_{ij},b_i,c_j(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$均为常数。

把式(5-7)称为线性规划问题的数学模型一般形式，简写为

目标函数：
$$\max(\text{或}\ \min)S=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

约束条件：
$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant(=,\geqslant)b_i\quad(i=1,2,\cdots,m)\\x_j\geqslant0\qquad\qquad\qquad(j=1,2,\cdots,n)\end{cases}\tag{5-8}$$

注 有时候将 $x_j\geqslant0$ 称为变量的非负约束条件。

2）标准形式

从式(5-7)可以看出，线性规划问题的一般形式包含了线性规划问题的多种形式，这

对我们阐述一些基本概念和求解方法带来不便，因此，规定一种线性规划问题的标准形式。

规定标准形式有以下特点。

（1）求目标函数的最大值。

（2）所有的约束方程都用等式表示。

（3）所有的变量都是非负的。

（4）约束方程等式右端的常数（称为约束常数）都是非负的。

一般地，线性规划问题的标准形式如下：

$$\max S = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,2,\cdots,n) \end{cases} \tag{5-9}$$

其中，$b_i \geqslant 0 (i=1,2,\cdots,m)$。线性规划问题的标准形式也可以写作

$$\max S = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & (b_i \geqslant 0;\ i = 1,2,\cdots,m) \\ x_j \geqslant 0 & (j = 1,2,\cdots,n) \end{cases} \tag{5-10}$$

用矩阵表示为

$$\max \boldsymbol{S} = \boldsymbol{CX}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \\ x_i \geqslant 0 \end{cases} \tag{5-11}$$

其中：

$$\boldsymbol{C} = (c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n)$$

$$\boldsymbol{X} = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \geqslant 0$$

3）线性规划问题的几个基本概念

对于线性规划问题

$$\max S = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (b_i \geqslant 0;\ i = 1,2,\cdots,m) \quad (5\text{-}12) \\ x_j \geqslant 0 & (j = 1,2,\cdots,n) \quad (5\text{-}13) \end{cases}$$

有以下几个基本概念。

（1）可行解。满足线性规划约束条件的解 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 称为线性规划问题的可行解。所有可行解的集合称为可行域或可行解集。

（2）最优解。使线性规划的目标函数达到最大的可行解称为线性规划的最优解。

（3）基本解。设 $\boldsymbol{A}$ 是约束方程组(5-12)的$(m\times n)$阶的系数矩阵$(m<n)$，其秩为 m，则 $\boldsymbol{A}$ 中任意 m 个线性无关的列向量构成的$(m\times m)$阶子矩阵，称为线性规划的一个基矩阵或简称为一个**基**，记作 $\boldsymbol{B}$。显然，$\boldsymbol{B}$ 为非奇异矩阵，即$|\boldsymbol{B}|\neq 0$。

组成基矩阵的 m 个列向量称为基向量，其余的 $n-m$ 个向量称为非基向量；与 m 个基向量相对应的 m 个变量称为基变量，其余的 $n-m$ 个变量则称为非基变量。显然，基变量随着基的变化而变化，当基被确定以后，基变量和非基变量也随之确定了。

若令约束方程组(5-12)中的 $n-m$ 个非基变量为零，再对余下的 m 个基变量求解，所得的约束方程组的解称为基本解。基本解的个数总是小于等于 C_n^m 的。

若设 $\boldsymbol{B}=(p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_m)$为线性规划的一个基，于是 $x_i(i=1,2,\cdots,m)$为基变量，$x_j(j=m+1,m+2,\cdots,n)$就为非基变量。现令非基变量 $x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_n=0$，方程组(5-12)就变为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mm}x_m = b_m \end{cases}$$

此时方程组有 m 个方程，m 个未知数，可唯一地解出 $x_1,x_2,\cdots,x_m$，因此向量

$$\boldsymbol{X} = (x_1,x_2,\cdots,x_m,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-m个})^{\mathrm{T}}$$

就是对应于基 $\boldsymbol{B}$ 的基本解。

（4）基本可行解。满足非负条件(5-13)的基本解称为基本可行解；对应于基本可行解的基称为可行基。

显然，基本可行解既是基本解，又是可行解。一般情况下，基本可行解的数目要少于基本解的数目，最多两者相等。

当基本可行解的非零分量个数恰为 m 时，称此解是非退化的解；如果有的基变量也取零值，即基本可行解的非零分量个数小于 m 时，称此解是退化解。

6. 单纯形表

设 m 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为线性规划问题

$$\max \boldsymbol{S} = \boldsymbol{CX}$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \quad (b_i > 0) \\ x_i \geqslant 0 \end{cases}$$

的一个基，$\boldsymbol{C_B}$ 表示基变量在目标函数中的系数组成的行矩阵，记

$$\boldsymbol{C_B B^{-1} A} - \boldsymbol{C} = (b_{01} \quad b_{02} \quad \cdots \quad b_{0n})$$

$$\boldsymbol{C_B B^{-1} b} = \boldsymbol{b}_{0n+1}$$

$$\boldsymbol{B^{-1} A} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B^{-1} b} = \begin{pmatrix} b_{1,n+1} \\ b_{2,n+1} \\ \vdots \\ b_{m,n+1} \end{pmatrix}$$

则对应于基 $\boldsymbol{B}$ 的单纯形表 $T(\boldsymbol{B})$ 为：

$$T(\boldsymbol{B}) = \begin{pmatrix} b_{01} & b_{02} & \cdots & b_{0n} & b_{0,n+1} \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} & b_{1,n+1} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} & b_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} & b_{m,n+1} \end{pmatrix}$$

表中的第 1 行除最后一个分量外，其余 n 个分量为检验数 $b_{0j}(j=1,2,\cdots,n)$；表中最后一列的第 1 个分量 $b_{0,n+1}$ 为对应于基 $\boldsymbol{B}$ 的目标函数值，其他 m 个分量 $b_{i,n+1}(i=1,2,\cdots,m)$ 就是对应于基 $\boldsymbol{B}$ 的基本解中变量的值(非基变量取 0 值)。

7. 基本定理

最优解判别定理：对于基 $\boldsymbol{B}$，如果

$$|\boldsymbol{B^{-1} b}| \geqslant 0, \quad |\boldsymbol{C_B B^{-1} A} - \boldsymbol{C}| \geqslant 0$$

则对应于基 $\boldsymbol{B}$ 的基本解 $\boldsymbol{X}$ 便是最优解，称为基本最优解，而基 $\boldsymbol{B}$ 称为最优基。

8. 基本解题方法和步骤

1）编制计划期的投入产出表的步骤

(1) 决定计划期的最终产品量 $\boldsymbol{Y}$。

(2) 利用报告期的直接消耗系数矩阵 $\boldsymbol{A}$，求出逆矩阵 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$，并利用公式 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{Y}$，求出计划期的总产出量 $\boldsymbol{X}$。

(3) 利用公式 $x_{ij}=a_{ij}x_j(i,j=1,2,\cdots,n)$，求出计划期各部门之间的中间产品 x_{ij}。

(4) 利用公式 $z_j=a_{ij}x_j(i,j=1,2,\cdots,n)$，求出计划期各部门的初始投入 z_j。

(5) 根据上述结果，编制计划期的投入产出表。

2）建立经济问题的线性规划数学模型的步骤

（1）确定决策变量 x_j。确定决策变量，就是确定优化的内容和对象。决策变量是不同方案赖以区分的根据，一般情况下，不同的决策变量表示着不同的方案。

（2）确定目标函数 S。优化的目标是经济管理工作者选择的标准，线性规划模型中的目标函数是决策变量的线性函数，它反映经济工作者所追求的目标（最大化的或最小化的），反映"目标"与"决策变量"之间的关系。一般情况下，当决策变量取不同值时，目标函数相应地取不同的值。

（3）确定约束条件。线性规划模型的约束条件是指优化过程中限制决策变量的一些条件，它们是决策变量线性等式或不等式。

3）线性规划模型化为标准型的步骤

（1）对于目标函数是求最小值的线性规划问题，只要将目标函数的系数反号，即可化为等价的最大值问题。

（2）约束条件为$\leqslant$（$\geqslant$）类型的线性规划问题，可在不等式左边加上（或者减去）一个非负的新变量，即可转换为等式。这个新增的非负变量称为松弛变量（或剩余变量），也可统称为松弛变量。在目标函数中一般认为新增的松弛变量的系数为零。

（3）如果在一个线性规划问题中，决策变量 x_k 的符号没有限制，可用两个非负的新变量 x_{n+k} 和 x_{n+k+1} 之差来代替，即将变量 x_k 写成 $x_k=x_{n+k}-x_{n+k+1}$，且有 $x_{n+k}\geqslant 0$，$x_{n+k+1}\geqslant 0$。通常将这样的 x_k 称为自由变量。

（4）当常数项 b_i 为负值时，可在该约束条件的两边分别乘以 -1。

4）线性规划问题图解法的步骤

（1）在平面上建立直角坐标系。

（2）图示约束条件，找出可行域。

（3）图示目标函数和寻找最优解。

5）线性规划问题的解的 3 种情况

（1）有唯一的最优解。

（2）有无穷多个最优解。当目标函数的系数与某一个约束条件相应变量的系数成比例时，问题就可能有无穷多个最优解；或者说当线性规划问题有两个不同的最优解时，则必有无穷多个最优解。

（3）无最优解。有两种情况：①模型的约束条件互不相容（互相矛盾），此时可行域为空集，该问题无可行解，因而无最优解；②可行域无界，如果是最大化（最小化）的目标函数，而可行域无上界（下界），则问题有可行解而无最优解。

6）单纯形方法的计算步骤

（1）将线性规划问题转换为标准形式，检查标准形式中是否存在现成的初始可行基（即单位矩阵）。若没有，进行第（2）步；否则，进行第（3）步。

（2）引进人工变量，配齐基变量，使获得的新问题中有一个现成的初始可行基。这里人工变量的目标函数为 $-M$，M 是一个很大的正数。

（3）写出可行基对应的单纯形表。

（4）在单纯形表中，检查可行基是否最优基。如果不是则进行第（5）步；否则，要检

查最优解中是否有人工变量。如果有人工变量,一般可以认为原问题没有最优解;如果没有人工变量,进行第(7)步。

(5) 判别问题是否有最优解。如果没有最优解,计算完毕;否则,进行下一步。

(6) 找出进、出基变量,利用初等行变换进行换基迭代,求出一个新的可行基。回到第(4)步。

(7) 判别原问题是否有无穷多最优解。如果是,求出另一个最优基和最优解,并写出无穷多最优解的一般表示式以及对应的目标函数值;如果不是,写出最优基对应的基本最优解和最优基。计算完毕。

5.3 学习要点

本章主要介绍了线性代数知识在国民经济计划、生产和管理中的一些应用,即介绍了投入产出模型和线性规划模型,并简单地介绍了处理这两个模型的一些方法。投入产出模型是属于经济数学模型中的平衡模型,是各种平衡模型中应用最为广泛的一种模型。线性规划模型是一种优化模型,是运筹学问题的一个重要分支,在许多生产方面有广泛应用,本章适用于经管类各专业。

学习本章要切实理解投入产出模型的概念;理解投入产出模型的概念;了解直接消耗系数及其矩阵、完全消耗系数及其矩阵的性质;掌握消耗平衡方程组及分配平衡方程组的解法;会根据实际问题编制投入产出表;了解线性规划问题数学模型的一般形式、标准形式;了解线性规划问题的基本概念和单纯形表的结构;掌握将线性规划问题数学模型的一般形式转换为标准形式的方法;掌握线性规划问题的解的判别方法和单纯形方法;会建立线性规划问题的数学模型。

5.4 例题增补

例 5-1 已知某一地区在一生产周期内生产经营活动情况如表 5-2 所示。

表 5-2

产出 部门间流量 投入		中间产品			最终产品	总产出
		1	2	3		
中间投入	1	100	25	30	y_1	400
	2	80	50	30	y_2	250
	3	40	25	60	y_3	300
初始投入		z_1	z_2	z_3		
总投入		400	250	300		

求：

(1) 各部门总产出 y_1, y_2, y_3。

(2) 各部门初始投入 z_1, z_2, z_3。

(3) 直接消耗系数矩阵 $\mathbf{A}$。

解 (1) 由表 5-2 可得分配平衡方程组

$$\begin{cases} y_1 = 400-(100+25+30)=245 \\ y_2 = 250-(80+50+30)=90 \\ y_3 = 300-(40+25+60)=175 \end{cases}$$

(2) 由表 5-2 可得消耗平衡方程组

$$\begin{cases} z_1 = 400-(100+80+40)=180 \\ z_2 = 250-(25+50+25)=150 \\ z_3 = 300-(30+30+60)=180 \end{cases}$$

(3) 由直接消耗系数公式和矩阵乘法运算规则，得

$$\mathbf{A}=(a_{ij})=\left(\frac{x_{ij}}{x_j}\right)=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x_3} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 100 & 25 & 30 \\ 80 & 50 & 30 \\ 40 & 25 & 60 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{400} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{250} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{300} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.25 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$$

例 5-2 已知某一地区在一生产周期内生产经营活动情况如表 5-3 所示。

表 5-3

部门间流量（产出 / 投入）		中间产品 1	中间产品 2	中间产品 3	最终产品	总产出
中间投入	1	20	0	10	70	x_1
	2	20	60	0	20	x_2
	3	0	10	20	20	x_3
初始投入		z_1	z_2	z_3		
总投入		x_1	x_2	x_3		

求：

(1) 各部门总产出 x_1, x_2, x_3。

(2) 各部门初始投入 z_1, z_2, z_3。

(3) 直接消耗系数矩阵 $\mathbf{A}$。

解　(1) 表 5-3 的分配平衡方程组为

$$x_i = \sum_{j=1}^{3} x_{ij} + y_i \quad (i = 1,2,3)$$

将 x_{ij} 和 x_j 代入，得

$$\begin{cases} x_1 = 20 + 0 + 10 + 70 = 100 \\ x_2 = 20 + 60 + 0 + 20 = 100 \\ x_3 = 0 + 10 + 20 + 20 = 50 \end{cases}$$

(2) 表 5-3 的消耗平衡方程组为

$$z_j = x_j - \sum_{i=1}^{3} x_{ij} \quad (j = 1,2,3)$$

将 x_{ij} 和 z_j 代入，得

$$\begin{cases} z_1 = 100 - (20 + 20 + 0) = 60 \\ z_2 = 100 - (0 + 60 + 10) = 30 \\ z_3 = 50 - (10 + 0 + 20) = 20 \end{cases}$$

(3) 由直接消耗系数公式和矩阵乘法运算规则，得

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) = \left(\frac{x_{ij}}{x_j}\right) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x_3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 20 & 0 & 10 \\ 20 & 60 & 0 \\ 0 & 10 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{100} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{100} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{50} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}$$

例 5-3　将下列线性规划的模型化为标准型：

$$\min S = -3x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leqslant 6 \\ -2x_1 - x_2 + x_4 = -4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \leqslant 3 \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,2,3,4) \end{cases}$$

解　通过以下 4 个步骤：

(1) 将目标函数两边乘以 -1，将问题转换为求最大值。

(2) 在第 1 个约束条件的左边加上松弛变量 x_5。

(3) 在第 2 个约束条件的等式两边乘以 -1。

(4) 在第 3 个约束条件的左边加上剩余变量 x_6。

于是得到该线性规划模型的标准型：

$$\max(-S)=3x_1-x_2-5x_3+2x_4$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1-4x_2+3x_3+2x_4+x_5=6\\2x_1+x_2-x_4=4\\2x_1+x_2-3x_3+x_6=3\\x_j\geqslant 0\quad(j=1,2,3,4,5,6)\end{cases}$$

例 5-4 用图解法求解以下线性规划问题：

$$\max S=40x_1+50x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+2x_2\leqslant 30\\3x_1+2x_2\leqslant 60\\2x_2\leqslant 24\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解 (1) 画出由约束条件所确定的可行域。

① 把决策变量 x_1,x_2 看作平面上点的坐标，由 $x_1,x_2\geqslant 0$ 知，可行域在第一象限。

② 画出直线。用等式约束代替不等式约束，如图 5-1 所示。

$$\begin{cases}x_1+2x_2=30\\3x_1+2x_2=60\\2x_2=24\end{cases}$$

③ 确定可行域。确定每个不等式所表示的半平面，取它们的交集，即为所求可行域，如图 5-1 阴影部分所示。

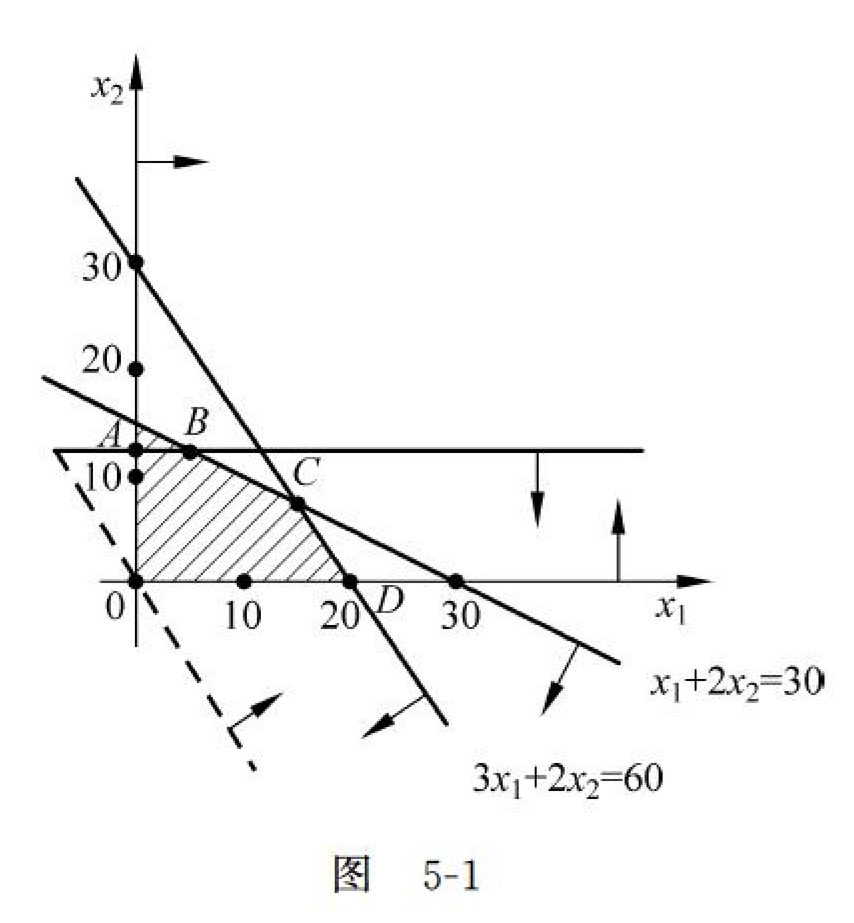


图 5-1

(2) 从可行域中找出最优解。

为了求得最优解，可用等值线法。最优解就是使目标函数取得最大值的凸五边形(阴影部分)中的点。为此将目标函数 $S=40x_1+50x_2$ 变形为

$$x_2=-\frac{4}{5}x_1+\frac{1}{50}S$$

当 S 变化时，便产生一族斜率为 $-\frac{4}{5}$ 的平行直线。令 S（即目标函数值）取 0，1，2，…作平行直线族。这样，要想在可行域中找到能使目标函数值最大的点，只须将等值线沿其增值方向平移到与可行域相交的极限位置，则此极限位置的点（假如极限位置存在）的坐标就是要找的最优解。从图 5-1 中可以看出，C 点的坐标就是最优解，而 C 点的坐标可以通过解方程组获得。

解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 30 \\ 3x_1 + 2x_2 = 60 \end{cases}$$

得最优解为

$$\boldsymbol{X} = (15 \quad 7.5)^{\mathrm{T}}$$
$$S_{\max} = 975$$

例 5-5　用图解法求解以下线性规划问题：

$$\min S = 3x_1 + 3x_2$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 - x_2 \geqslant -2 \\ 2x_1 + x_2 \geqslant 2 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解　（1）画出由约束条件所确定的可行域。

① 把决策变量 x_1, x_2 看作平面上点的坐标，由 $x_1, x_2 \geqslant 0$ 知，可行域在第一象限。

② 画出直线。用等式约束代替不等式约束，如图 5-2 所示。

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -2 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

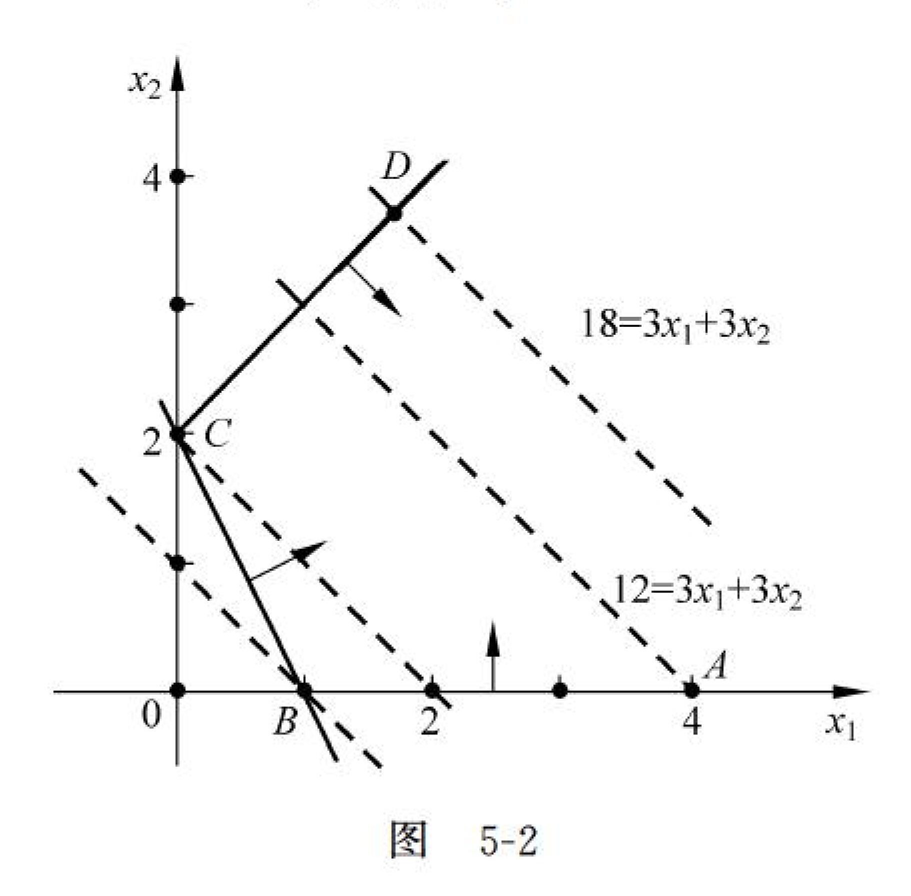


图　5-2

③ 确定可行域。确定每一个不等式所表示的半平面，取它们的交集，即为所求可行域。

（2）从可行域中找出最优解。

用等直线法。令 $S=18,12,6,\cdots$，则可得到一族平行的目标函数等值线，如图 5-2 所

示。由图 5-2 可知，直线离原点越近，目标函数值越小，且在可行域的 B 点处取到最小值。

B 点坐标为 $B(1,0)$，即该问题最优解为

$$x_1=1,\quad x_2=0$$

对应的最优值为

$$S=3\times1+3\times0=3$$

例 5-6 求解以下线性规划问题的最优解：

$$\max S=5x_1+2x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}30x_1+20x_2\leqslant160\\5x_1+x_2\leqslant15\\x_1\leqslant4\\x_1,x_2\geqslant0\end{cases}$$

解 首先将原问题转换为标准形式，即

$$\max S=5x_1+2x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4+0\cdot x_5$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}30x_1+20x_2+x_3=160\\5x_1+x_2+x_4=15\\x_1+x_5=4\\x_j\geqslant0\quad(j=1,2,3,4,5)\end{cases}$$

然后取约束方程组中变量 x_3,x_4,x_5 前的系数列向量组成基 $\boldsymbol{B}_0$，基 $\boldsymbol{B}_0$ 对应的单纯形表以及换基迭代，寻找最优基的过程如下：

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{B}_0)=\begin{pmatrix}1&-5&-2&0&0&0&0\\0&30&20&1&0&0&160\\0&5&1&0&1&0&15\\0&1&0&0&0&1&4\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&0&1&0&15\\0&0&14&1&-6&0&70\\0&1&\frac{1}{5}&0&\frac{1}{5}&0&3\\0&0&-\frac{1}{5}&0&-\frac{1}{5}&1&1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{14}&\frac{4}{7}&0&20\\0&0&1&\frac{1}{14}&-\frac{3}{7}&0&5\\0&1&0&-\frac{1}{70}&\frac{2}{7}&0&2\\0&0&0&\frac{1}{70}&-\frac{2}{7}&1&2\end{pmatrix}$$

在基 $\boldsymbol{B}_2$ 对应的单纯形表中，因为检验数 $b_{0j}\geqslant0(j=1,2,3,4,5)$，所以基 $\boldsymbol{B}_2$ 是一个最

优基,对应的最优解为

$$X=(2\quad 5\quad 0\quad 0\quad 2)^{\mathrm{T}}$$

最优值为 $S=20$。

例 5-7　用单纯形法求解以下线性规划问题:

$$\min S=3x_1+x_2+x_3+x_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-2x_1+2x_2+x_3=4\\3x_1+x_2+x_4=6\\x_j\geqslant 0\quad(j=1,2,3)\end{cases}$$

分析　这都是约束方程"="约束的情况。在这类问题中,基变量的目标函数系数不全为0,所以在目标函数标准化后,首先要计算初始可行基对应的检验数和目标函数值:

$$|\boldsymbol{C_B B^{-1} A-C}|,\quad |\boldsymbol{C_B B^{-1} b}|$$

然后才能用单纯形表进行换基迭代,寻找最优解和最优基。

解　首先将原问题转换为标准形式,即:

$$\max S'=-3x_1-x_2-x_3-x_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-2x_1+2x_2+x_3=4\\3x_1+x_2+x_4=6\\x_j\geqslant 0\quad(j=1,2,3)\end{cases}$$

然后取约束方程组中变量 x_3,x_4 前的系数列向量组成基 $\boldsymbol{B}_0$,即 $\boldsymbol{B}_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{B}_0^{-1}=\boldsymbol{E}$,且基变量 x_3,x_4 的目标函数为 $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{B}_0}=(-1\quad -1)$,且

$$\boldsymbol{B}_0^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{B}_0^{-1}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{B}_0}\boldsymbol{B}_0^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}&=(-1\quad -1)\begin{pmatrix}-2&2&1&0\\3&1&0&1\end{pmatrix}-(-3\quad -1\quad -1\quad -1)\\&=(-1\quad -3\quad -1\quad -1)-(-3\quad -1\quad -1\quad -1)\\&=(2\quad -2\quad 0\quad 0)\end{aligned}$$

$$|\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{B}_0}||\boldsymbol{B}_0^{-1}\boldsymbol{b}|=|-1\quad -1|\begin{vmatrix}4\\6\end{vmatrix}=-10$$

可得基 $\boldsymbol{B}_0$ 对应的单纯形表,并利用初等行变换进行换基迭代,寻找最优解,即:

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{B}_0)=\begin{pmatrix}2&-2&0&0&-10\\-2&2&1&0&4\\3&1&0&1&6\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0&0&1&0&-6\\-1&1&\frac{1}{2}&0&2\\4&0&-\frac{1}{2}&1&4\end{pmatrix}$$

在基 $\boldsymbol{B}_1$ 对应的单纯形表中,因为检验数 $b_{0j}\geqslant 0(j=1,2,3,4,5,6)$,所以基 $\boldsymbol{B}_1$ 是一个最优基,对应的最优解为

$$\boldsymbol{X}^{(1)}=(0\quad 2\quad 0\quad 4)^{\mathrm{T}}$$

最优值为

$$\boldsymbol{S}=-\boldsymbol{S}'=6$$

但是从检验数中可以看到，除基变量的检验数为 0 外，还有非基变量 x_1 的检验数为 0，说明有可能存在其他最优解。不妨让非基变量 x_1 进基，并由最小比值原则确定 x_4 出基，然后再进行换基迭代，寻找另一个基本最优解，即：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & \frac{3}{8} & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

可见基 $\boldsymbol{B}_2$ 也是一个最优基，对应的最优解为

$$\boldsymbol{X}^{(2)} = (1 \quad 3 \quad 0 \quad 0)^{\mathrm{T}}$$

最优值为

$$\boldsymbol{S} = -\boldsymbol{S}' = 6$$

所以，这一问题有无穷多最优解：

$$\boldsymbol{X} = a\boldsymbol{X}^{(1)} + (1-a)\boldsymbol{X}^{(2)} \quad (0 \leqslant a \leqslant 1)$$

5.5 教材部分习题解题参考

习题 5-2

1. 将下列线性规划模型转换为标准型。

（1）$\max S = 2x_1 + x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geqslant 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \geqslant 6 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 3 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解 $\max S = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 3 \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,2,3,4,5) \end{cases}$$

（2）$\min S = -2x_1 + 5x_2 + x_3$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 9x_1 + 5x_2 - 14 \leqslant 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 8x_1 - x_2 + 4x_3 \geqslant 0 \\ x_1, x_2 \geqslant 0, x_3 \text{ 无非负约束} \end{cases}$$

解　$\max S=2x_1-5x_2-x_4+x_5+0x_6+0x_7$

$$\text{s. t.}\begin{cases}9x_1+5x_2+x_6=14\\x_1+3x_2-2x_4+2x_5=2\\8x_1-x_2+4x_4-4x_5-x_7=0\\x_j\geqslant 0\quad (j=1,2,4,5,6,7)\end{cases}$$

2. 用图解法求解线性规划模型。

(1) $\min S=-2x_1+x_2$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+x_2\geqslant 1\\x_1-3x_2\geqslant -3\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解　无最优解(有可行解,但无最优解)。

(2) $\max S=3x_1+x_2$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+x_2\leqslant 4\\-x_1+x_2\leqslant 0\\6x_1+2x_2\leqslant 18\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解　最优解：$\boldsymbol{X}=a(3\quad 0)^{\mathrm{T}}+(1-a)\left(\frac{5}{2}\quad \frac{3}{2}\right)^{\mathrm{T}}$,其中 $0\leqslant a\leqslant 1$。

最优值：$S=9$。

总习题 5

1. 选择题。

(1) 线性规划问题的最优解一定是(　　)。

A. 基本解　　B. 基本可行解　　C. 基本最优解　　D. 可行解

(2) 已知线性规划问题：

$$\max S = x_1$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1 + x_2 \leqslant 1\\- x_1 + x_2 \leqslant -1\\x_j \geqslant 0\quad (j = 1,2)\end{cases}$$

这个问题(　　)。

A. 无最优解,但有可行解　　B. 有唯一最优解

C. 无可行解　　D. 有无穷多最优解

(3) 已知下列 3 个数学问题：

① $\max S=x_1^2+x_2^2$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+x_2\leqslant 3\\-x_1+x_2=5\\x_j\geqslant 0\quad (j=1,2)\end{cases}$$

② $\max S=3x_1+x_2-x_3$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+x_2\geqslant 3\\2x_1+x_2x_3\leqslant 5\\x_j\geqslant 0\quad (j=1,2,3)\end{cases}$$

③ $\min S=4x_1-5x_2$

$$\text{s. t.}\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 3\\x_1+x_2=4\\x_j\geqslant 0\quad(j=1,2)\end{cases}$$

以上 3 个数学问题中,是线性规划问题的是(　　)。

A. ①　　B. ②　　C. ③　　D. ①,③

2. 填空题。

(1) 线性规划数学模型的两个组成部分是________和________。

(2) 线性规划问题的最优解是使________取得最优值的可行解。

(3) 线性规划问题的基与解的对应关系是基对应________解。

(4) 设有以下线性规划问题:

$$\max S = x_1 + 3x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1 \leqslant 5\\x_1 + 2x_2 \leqslant 10\\x_2 \leqslant 4\\x_j \geqslant 0\quad(j = 1,2)\end{cases}$$

若取约束方程组中变量 x_4,x_5,x_6 的系数列向量组成基 $\boldsymbol{B}$,则基 $\boldsymbol{B}$ 对应的单纯形表 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{B})=$________。

3. 判断题。

(1) 一个线性规划问题的最优解一定是可行解。(　　)

(2) 单纯形法中出基变量的确定是按照最大比值原则。(　　)

(3) 直接消耗系数矩阵中的元素可以有负值。(　　)

(4) 线性规划问题的两个可行解之间连线上的点都是可行解。(　　)

(5) 线性规划问题不一定有最优解存在。(　　)

4. 试写出下列问题的数学模型,不用求解。

某工厂用甲、乙两种原料混合制成质量为 55g 的产品,其中甲种原料不少于 20g,乙种原料不多于 40g。甲种原料的平均单位成本为 2.5 元/g,乙种原料的平均单位成本为 1 元/g。问工厂应如何在产品中搭配甲、乙两种原料,才能使产品的成本最低?

5. 计算题。

(1) 写出下列线性规划问题的标准形式:

$$\min S = 3x_1 - x_2 + 2x_3$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1 + 2x_2 - x_3 \geqslant 2\\-x_1 + x_2 + x_3 = 4\\-x_1 + 2x_2 - x_3 \leqslant -6\\x_j \geqslant 0\quad(j = 1,2)\end{cases}$$

（2）求解线性规划问题：

$$\max S = 3x_1 - x_2 - x_3$$
$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leqslant 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 3 \\ -2x_1 + x_3 = 1 \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,2,3) \end{cases}$$

答案

1.（1）D　（2）B　（3）C

2.（1）目标函数，约束方程

（2）目标函数

（3）基本

（4）$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

3.（1）√　（2）×　（3）×　（4）√　（5）√

4. $\min S = 2.5x_1 + x_2$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1 + x_2 = 55 \\ x_1 \geqslant 20 \\ x_2 \leqslant 40 \\ x_j \geqslant 0 \quad (j=1,2) \end{cases}$$

5.（1）$\max S = -3x_1 + x_2 - 2x_4 + 2x_5 + 0x_6 + 0x_7$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 - x_6 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 - x_5 - x_7 = 6 \\ x_j \geqslant 0 \quad (j=1,2,4,5,6,7) \end{cases}$$

（2）最优解为 $\boldsymbol{X} = (4 \quad 1 \quad 9 \quad 0 \quad 0)^{\mathrm{T}}$，最优值为 $S=2$。

第6章

概率论的基本概念

6.1 基本要求

(1) 了解样本空间的概念，理解随机事件的概念，掌握事件间的关系及运算，会用事件间的关系及运算表示随机事件。

(2) 理解概率的概念，掌握概率的基本性质，会计算古典型概率。

(3) 理解条件概率的概念，掌握计算概率的加法公式、乘法公式、全概率公式及贝叶斯公式，并能应用公式求解相关问题。

(4) 理解事件独立性的概念，掌握用事件的独立性进行概率计算。

6.2 内容提要

1. 随机事件的相关概念

(1) 随机试验。满足下面 3 个条件的试验称为随机试验：

① 在相同的条件下可以重复进行。

② 每次试验的结果不止一个，并且事先能明确试验的所有可能结果。

③ 一次试验之前不能确定哪一个结果会出现。

(2) 样本空间。随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，记作 S。

(3) 随机事件。样本空间的子集，即试验的结果称为随机事件，简称事件。

(4) 必然事件。每次试验中一定发生的事件称为必然事件，记作 S。

(5) 不可能事件。每次试验中都不发生的事件称为不可能事件，记作$\varnothing$。

2. 事件的关系及运算

(1) 事件的包含：若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A 包含于事件B，或

事件 B 包含事件 A，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$。

(2) 事件相等：若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称事件 A 与 B 相等，记作 $A=B$。

(3) 和(并)：两个事件 A 和 B 中至少有一个发生的事件称为 A 与 B 的和事件，记作 $A\cup B$ 或 $A+B$。

推广：$\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生。

$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k\cup\cdots$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$ 中至少有一个发生。

(4) 积：事件 A 与 B 同时发生的事件称为 A 与 B 的积事件，记作 $A\cap B$ 或 AB。

推广：$\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生。

$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k\cap\cdots$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$ 同时发生。

(5) 差：A 发生而 B 不发生的事件，称为 A 与 B 的差事件，记作 $A-B$。

(6) 互不相容：若 $AB=\varnothing$，则称 A,B 互不相容或互斥。

(7) 相互对立：若 $A\cup B=S$ 且 $AB=\varnothing$，则称 A 与 B 互为逆事件，又称 A 与 B 相互对立。

(8) 简单性质：

$A\cup A=A$	$A\cup S=S$	$A\cup\varnothing=A$	$A\subsetneqq A+B$	$B\subsetneqq A+B$
$AA=A$	$AS=A$	$A\varnothing=\varnothing$	$A-B\subsetneqq A+B$	$A-B\subsetneqq A$
$(A-B)\cup B=A+B$	$(A-B)\cap B=\varnothing$		$A-B=A-AB=A\overline{B}$	$A\cup B=A+B\overline{A}$

3. 事件的运算律

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A, AB=BA$

(2) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, (AB)C=A(BC)$

(3) 分配律：$A(B\cup C)=(AB)\cup(AC), (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

(4) 德摩根(De Morgan)律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\overline{B}, \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$

4. 概率的定义与性质

(1) 定义：设 E 为随机试验，S 为它的样本空间，对于 E 中的每一事件 A，恰对应一个实数，记为 $P(A)$，若它满足下列 3 个条件，则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率。

① $0\leqslant P(A)\leqslant 1$

② $P(S)=1$

③ 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是两两互不相容事件，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

(2) 性质：

① $P(\varnothing)=0$

② $P(\overline{A})=1-P(A)$

③ 若 $A_iA_j=\varnothing(1\leqslant i\leqslant j\leqslant n)$，则 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$

④ $P(A-B)=P(A)-P(AB)$，特别地，若 $A\supsetneqq B$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$

⑤ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_2A_3)-P(A_3A_1)+P(A_1A_2A_3)$$

5. 古典概型

(1) 古典概型应满足的条件：

① 样本空间 S 的元素(即基本事件)为有限个。

② 每个基本事件发生的可能性相同。

(2) 概率计算公式：

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{ 中所含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

6. 条件概率及乘法公式

(1) 定义：设 A,B 是两个事件，且 $P(A)>0$，则称 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率。

(2) 乘法公式：

设 $P(A)>0$，则有

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)$$

一般地，设 $P(A_1A_2A_3\cdots A_n)>0$，则有

$$P(A_1A_2A_3\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

7. 独立性

(1) 定义：若 $P(AB)=P(A)P(B)$ 成立，则称 A 与 B 相互独立。

设 A,B,C 是 3 个事件，如果有等式 $\begin{cases}P(AB)=P(A)P(B)\\P(BC)=P(B)P(C)\\P(CA)=P(C)P(A)\\P(ABC)=P(A)P(B)P(C)\end{cases}$，则称 A,B,C 相互独立。

(2) 重要结论。

① 若 A 与 B，A 与 $\bar{B}$，$\bar{A}$ 与 B，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 中有一对相互独立，则其余 3 对也相互独立。

② 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立；反之，则不成立。

③ A 和 B 相互独立与 A 和 B 互不相容没有蕴含关系；若 A 与 B 相互独立又互斥，则 A 与 B 必有一个为零概率事件。

8. 全概率公式与贝叶斯公式

1）完备事件组

若事件组 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 满足：①$B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S$；②$B_iB_j=\varnothing(i\neq j)$，则称事件组 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为完备事件组。

2）全概率公式

若 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为完备事件组，且 $P(B_i)>0$，则有

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\cdots+P(B_n)P(A|B_n)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)$$

3）贝叶斯公式

设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为完备事件组，且 $P(B_i)>0$，则

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(B_j)P(A\mid B_j)}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

6.3　学习要点

本章内容是后续内容的基础，重点是概率的计算；对于随机事件要注重学会用事件间的关系和运算来表示，以便能够利用运算公式简化概率的计算，要熟记概率的有关公式及条件；在进行概率的计算时，要理清样本空间是什么，所含基本事件有多少，注意排列组合相关知识的应用；若事件是若干事件的复合，要注意判断事件间是否独立；对于全概率公式及贝叶斯公式要了解这两个公式使用的条件及如何分析完备事件组。

6.4　例题增补

例 6-1　已知$(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})+\overline{A+B}+\overline{A+\overline{B}}=C$，求 A。

分析　本题要利用德摩根律将事件的和的逆事件分离开，再利用分配律进行事件的乘法运算。

解　由于$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{A+\overline{B}}=\overline{A}\,\overline{\overline{B}}$，而$(\overline{A}+B)(A+\overline{B})+\overline{A+B}+\overline{A+\overline{B}}=C$，故有

$$(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})+\overline{A+B}+\overline{A+\overline{B}}=C$$

由　$\overline{A}+\overline{A}\,\overline{B}+B\overline{A}+B\overline{B}+\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}\,\overline{\overline{B}}=C$

可推出　$\overline{A}+\overline{A}\,\overline{B}+B\overline{A}+B\overline{B}+\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}B=C$

即　$\overline{A}+\overline{A}(\overline{B}+B)+\varnothing+\overline{A}(\overline{B}+B)=C\Rightarrow\overline{A}=C$

故　$A=\overline{C}$

例 6-2　求在 10 个数字 0,1,2,…,9 中不重复地任取 4 个能组成一个 4 位偶数的概率。

分析　没有重复数字的 4 位偶数的条件是：①数字不能重复；②0 不能排在千位；

③排在个位上的数字必须是 0,2,4,6,8 之一。

解 设 $A=\{$任取的 4 个数字能组成不重复的 4 位偶数$\}$,将 4 位偶数分为两类：

(1) 0 排个位,一共有 A_9^3 种方法。

(2) 0 不排个位,则 2,4,6,8 中某一个排在个位,共有 $A_4^1A_8^1A_8^2$ 种方法。

故
$$P(A)=\frac{A_9^3+A_4^1A_8^1A_8^2}{A_9^1A_9^3}=\frac{41}{81}$$

注 对古典概型的概率问题要弄清楚事件 A 包含的基本事件个数及样本空间包含的基本事件总数,一般要用到排列组合种数的计算及乘法原理与加法原理。这些内容要及时复习并掌握。

例 6-3 毕业答辩时有 3 张考签,3 名学生每个人随机抽取 1 张进行答辩,答辩后放回。求至少有 1 张考签未被抽到的概率。

解 解法 1 设 $A_i=\{$第 i 个考签未被抽到$\}(i=1,2,3)$,A_i 表示每次都未抽到第 i 个考签。至少有 1 张考签未被抽到可表示为 $A_1+A_2+A_3$。该题是求 $P(A_1+A_2+A_3)$：
$$P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_2A_3)-P(A_3A_1)+P(A_1A_2A_3)$$

由于取后放回,故每次抽到的结果相互独立,每次第 i 个考签未被抽到的概率均为 $\frac{2}{3}$,有 $P(A_i)=\left(\frac{2}{3}\right)^3$。

A_iA_j 表示每次抽到的是除了 i 和 j 以外的另一张考签,故 $P(A_iA_j)=\frac{1}{3}$。

而 $P(A_1A_2A_3)=0$。

故
$$\begin{aligned}P(A_1+A_2+A_3)&=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)\\&\quad-P(A_2A_3)-P(A_3A_1)+P(A_1A_2A_3)\\&=3\left(\frac{2}{3}\right)^3-3\left(\frac{1}{3}\right)^3+0=\frac{7}{9}\end{aligned}$$

解法 2 设 $A=\{$至少有 1 张考签未被抽到$\}$,则 $\overline{A}=\{$3 个考签都被抽到$\}$,其抽法有 $A_3^3=3!$ 种。任意抽取的抽法有 3^3 种,故
$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{3!}{3^3}=\frac{7}{9}$$

注

(1) 在求 n 个事件中至少有一个事件发生的概率就是求 n 个事件的和的概率,用加法公式。

(2) 用加法公式时,先要判断事件是否互不相容。

(3) 若 $P(\overline{A})$ 易求,应用公式 $P(A)=1-P(\overline{A})$ 来求事件 A 的概率。

例 6-4 已知某种灯泡能用到 2000 小时的概率为 0.98,用到 2500 小时的概率为 0.90,求使用了 2000 小时的灯泡能再使用 500 小时的概率。

解 设 $A=\{$灯泡使用了 2000 小时$\}$,$B=\{$使用到 2500 小时$\}$。使用了 2000 小时的灯泡再使用 500 小时意味着灯泡已经使用了 2000 小时,即事件 A 已经发生,该题是求条

件概率。

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.90}{0.98}\approx 0.92$$

例 6-5　设 A,B 为两个相互独立的事件，且 $P(A)=0.4,P(B)=0.5$，求 $P(\bar{A}B)$，$P(A\bar{B})$，$P(\bar{B}|\bar{A})$。

解　因为 A 与 B 相互独立，所以 A 与 $\bar{B}$、$\bar{A}$ 与 B、$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 均相互独立。故

$$P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B)=[1-P(A)]P(B)=(1-0.4)\times 0.5=0.3$$

$$P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B})=P(A)[1-P(B)]=0.4\times(1-0.5)=0.2$$

$$P(\bar{B}|\bar{A})=P(\bar{B})=1-P(B)=0.6$$

例 6-6　3 门火炮对准目标射击，击中目标的概率依次为 0.8、0.85、0.9，求：

(1) 3 门火炮都击中目标的概率。

(2) 不少于 2 门火炮击中目标的概率。

解　设 $A_i=\{$第 i 门火炮击中目标$\}(i=1,2,3)$，则

$$P(A_1)=0.8,\quad P(A_2)=0.85,\quad P(A_3)=0.9$$

(1) $P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0.8\times 0.85\times 0.9$

$=0.612$（A_1,A_2,A_3 相互独立）

(2) $P(A_1A_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3+A_1A_2A_3)$

$=P(A_1A_2\bar{A}_3)+P(A_1\bar{A}_2A_3)+P(\bar{A}_1A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)$（$A_i,A_j$ 相互独立，$\bar{A}_i,A_j$ 也相互独立）

$=P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)+P(A_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)+P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3)+P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

$=0.8\times 0.85\times 0.1+0.8\times 0.15\times 0.9+0.2\times 0.85\times 0.9+0.8\times 0.85\times 0.9=0.941$

注

(1) 判断是乘积的概率或条件概率是要看某一事件是否“已经”发生，不用定义而根据题目的实际意义是否已经发生作判定。

(2) 用乘法公式时，首先要看事件组是否相互独立。

(3) 若 A 与 B、A 与 $\bar{B}$、$\bar{A}$ 与 B、$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 中有一对相互独立，则其余三对也相互独立。

(4) 判断事件相互独立不用定义，而是看实际上它们之间是否相互影响。若 A 的发生不影响 B 发生的概率，则它们相互独立。

例 6-7　甲、乙、丙 3 人同时对空中目标进行射击，击中的概率分别为 0.4、0.5、0.7。目标被 1 人击中而击落的概率为 0.2，被 2 人击中而击落的概率为 0.6，若 3 人都击中，目标必定被击落。求：

(1) 目标被击落的概率。

(2) 若目标被击落，求目标被 2 人击中的概率。

分析　本题应用全概率公式。全概率公式可以看成“由原因推结果”，每个原因对结果的发生有一定的“作用”，即结果发生的可能性与各种原因的“作用”大小有关。本题中“目标被击落”的原因为“1 人击中、2 人击中或 3 人击中”，由此得到完备事件组。

解　设 $A=\{$目标被击落$\}$，$B_i=\{$目标被 i 人击中$\}(i=0,1,2,3)$。显然 B_1,B_2,B_3 构成一个完备事件组。设 $H_i=\{$目标被第 i 人击中$\}(i=1,2,3)$，则

$$P(B_0)=P(\bar{H}_1\bar{H}_2\bar{H}_3)=0.6\times 0.5\times 0.3=0.09$$

$$P(B_1)=P(H_1\overline{H}_2\overline{H}_3)+P(\overline{H}_1H_2\overline{H}_3)+P(\overline{H}_1\overline{H}_2H_3)$$
$$=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7=0.36$$
$$P(B_2)=P(H_1H_2\overline{H}_3)+P(H_1\overline{H}_2H_3)+P(\overline{H}_1H_2H_3)$$
$$=0.4\times0.5\times0.3+0.4\times0.5\times0.7+0.6\times0.5\times0.7=0.41$$
$$P(B_3)=P(H_1H_2H_3)=0.4\times0.5\times0.7=0.14$$
$$P(A|B_0)=0,P(A|B_1)=0.2,P(A|B_2)=0.6,P(A|B_3)=1$$

(1) 由全概率公式得

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(B_i)P(A\mid B_i)$$
$$=0.09\times0+0.36\times0.2+0.41\times0.6+0.14\times1$$
$$=0.458$$

(2) $$P(B_2\mid A)=\frac{P(B_2)P(A\mid B_2)}{\sum_{i=0}^{3}P(B_i)P(A\mid B_i)}=\frac{0.41\times0.6}{0.458}\approx0.537$$

注 贝叶斯公式是“由结果到原因”，它可以帮助人们确定某结果（事件 A）发生的最可能原因。

6.5 教材部分习题解题参考

习题 6-2

3. 邮政大厅有 5 个空的邮筒，现将两封信逐一随机投入邮筒，求第 1 个邮筒内恰好有一封信的概率。

解 样本空间的基本事件总数 $n=5\times5=25$。设 $A=\{$第 1 个邮筒内恰好有一封信$\}$，则完成事件 A 必须依次经过两个步骤：①从两封信中选出一封信投入第 1 个邮筒，有2 种方法；②将剩下的一封信投入其余 4 个邮筒中的任一邮筒，有 4 种方法，所以 A 中包含的基本事件数为 $m=2\times4=8$，故

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{8}{25}$$

4. 有 10 张分别标有数字 1～10 的卡片，从中任选 3 张记录其号码，求：

(1) 最小号码为 5 的概率。

(2) 最大号码为 5 的概率。

解 样本空间的基本事件总数 $n=C_{10}^3=120$，设 $A=\{$所选卡片最小号码为 5$\}$，$B=\{$所选卡片最大号码为 5$\}$。

(1) 所选卡片最小号码为 5，则其中一个号码为 5 且其余 2 个号码都大于 5，从 6～10 这 5 个数中选，则 A 中基本事件数 $m=C_5^2$，有 $P(A)=\frac{C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}$。

(2) 同理可得 $P(B)=\frac{C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{20}$。

6. 设 A,B 为两个事件，已知 $P(A)=0.5,P(B)=0.7,P(A\cup B)=0.8$，求 $P(A-B)$ 和 $P(B-A)$。

解　由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 得

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.5+0.7-0.8=0.4$$
$$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=0.5-0.4=0.1$$
$$P(B-A)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=0.7-0.4=0.3$$

7. 已知 $A\subset B,P(A)=0.4,P(B)=0.6$，求：

(1) $P(\bar{A}),P(\bar{B})$。

(2) $P(A\cup B)$。

(3) $P(AB)$。

(4) $P(\bar{A}B),P(A\bar{B})$。

(5) $P(\bar{A}\bar{B})$。

解　(1) $P(\bar{A})=1-P(A)=1-0.4=0.6,P(\bar{B})=1-P(B)=1-0.6=0.4$

(2) $P(A\cup B)=P(B)=0.6$

(3) $P(AB)=P(A)=0.4$

(4) $P(\bar{A}B)=P(B-AB)=P(B)-P(A)=0.2$

$P(A\bar{B})=P(A-AB)=P(\varnothing)=0$

(5) $P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(B)=0.4$

习题 6-3

2. (1) 已知 $P(\bar{A})=0.3,P(B)=0.4,P(A\bar{B})=0.5$，求条件概率 $P(B|A\cup\bar{B})$；

解
$$P(B|A\cup\bar{B})=\frac{P(B(A\cup\bar{B}))}{P(A\cup\bar{B})}=\frac{P(AB)}{P(A)+P(\bar{B})-P(A\bar{B})}$$

由已知得

$$P(A)=1-P(\bar{A})=0.7,P(\bar{B})=1-P(B)=0.6$$
$$P(AB)=P(A(\Omega-\bar{B}))=P(A)-P(A\bar{B})=0.2$$

故

$$P(B|A\cup\bar{B})=\frac{0.2}{0.7+0.6-0.5}=0.25$$

(2) 已知 $P(A)=\frac{1}{4},P(B|A)=\frac{1}{3},P(A|B)=\frac{1}{2}$，求 $P(A\cup B)$。

解
$$P(AB)=P(B|A)P(A)=\frac{1}{12},P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}$$

故
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$$

3. 已知在10件产品中有2件次品，在其中取2次，每次任取1件，作不放回抽样，求下列事件的概率。

(1) 2 件都是正品。

(2) 1 件是正品，1 件是次品。

(3) 2 件都是次品。

(4) 第 2 次取出的是次品。

解 设 $A_i(i=1,2)=\{$第 i 次抽出的是正品$\}$。

(1) $P(A_1A_2)=P(A_2|A_1)P(A_1)=\frac{7}{9}\times\frac{8}{10}=\frac{28}{45}$

(2) $P(A_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1A_2)=P(A_1\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1A_2)=P(\overline{A}_2|A_1)P(A_1)+P(A_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_1)$

$$=\frac{2}{9}\times\frac{8}{10}+\frac{8}{9}\times\frac{2}{10}=\frac{16}{45}$$

(3) $P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_1)=\frac{1}{9}\times\frac{2}{10}=\frac{1}{45}$

(4) $P(\overline{A}_2)=P[(A_1\cup\overline{A}_1)A_2]=P(A_1\overline{A}_2)\cup(\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(A_1\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2)$

$$=P(\overline{A}_2|A_1)P(A_1)+P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_1)=\frac{2}{9}\times\frac{8}{10}+\frac{1}{9}\times\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

4. 某人忘记了电话号码的最后一个数字，因而他随意地拨号，求他拨号不超过 3 次而接通所需电话的概率。若已知最后一个数字是奇数，则此概率是多少？

解 设 $A_i(i=1,2,3)=\{$第 i 次拨号拨通电话$\}$，$A=\{$拨号不超过 3 次拨通电话$\}$，则有

$$A=A_1\cup\overline{A}_1A_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$$

其中，$A_1,\overline{A}_1A_2,\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ 两两互不相容，因此有

$$P(A_1)=\frac{1}{10}$$

$$P(\overline{A}_1A_2)=P(A_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_1)=\frac{1}{9}\times\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$$

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_1)=\frac{1}{8}\times\frac{8}{9}\times\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$$

则 $$P(A)=P(A_1)+P(\overline{A}_1A_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=\frac{3}{10}$$

当已知最后一位数字为奇数时，所求概率为$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$。

6. 已知男子有 5% 是色盲患者，女子有 0.25% 是色盲患者。今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，恰好是色盲者，问此人是男性的概率是多少。

解 设 $A=\{$挑选出的是色盲者$\}$，$B=\{$选出的是男性$\}$，$\overline{B}=\{$选出的是女性$\}$，则

$$P(B)=\frac{1}{2},\quad P(\overline{B})=\frac{1}{2},\quad P(A|B)=0.05,\quad P(A|\overline{B})=0.0025$$

$$P(B_1)=0.3,\quad P(B_2)=0.2,\quad P(B_3)=0.1,\quad P(B_4)=0.4$$

由贝叶斯公式得

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})}$$

$$=\frac{0.05\times\frac{1}{2}}{0.05\times\frac{1}{2}+0.025\times\frac{1}{2}}=\frac{20}{21}$$

7. 有 2 箱同种类的零件，第 1 箱装 50 只，其中 10 只一等品；第 2 箱装 30 只，其中 18 只一等品。今从 2 箱中任意挑出 1 箱，然后从该箱中取零件 2 次，每次任取 1 只，做不放回抽样。求：

(1) 第 1 次取到的零件是一等品的概率。

(2) 在第 1 次取到的零件是一等品的条件下，第 2 次取到的也是一等品的概率。

解　设 $B=\{$从第 1 箱中取零件$\}$，$\bar{B}=\{$从第 2 箱中取零件$\}$，$A_i=\{$第 i 次取得的是一等品$\}(i=1,2)$。

由已知条件得 $P(B)=\frac{1}{2}$，$P(\bar{B})=\frac{1}{2}$。

(1) $P(A_1|B)=\frac{1}{5}$，$P(A_1|\bar{B})=\frac{3}{5}$，故

$$\begin{aligned}P(A_1)&=P(A_1|B)P(B)+P(A_1|\bar{B})P(\bar{B})\\&=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

(2) $P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}$

其中
$$P(A_1A_2)=P(A_1A_2|B)P(B)+P(A_1A_2|\bar{B})P(\bar{B})$$
$$P(A_1A_2|B)=\frac{10}{50}\times\frac{9}{49},P(A_1A_2|\bar{B})=\frac{18}{30}\times\frac{17}{29}$$

故有
$$\begin{aligned}P(A_2|A_1)&=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}\\&=\frac{1}{P(A_1)}[P(A_1A_2|B)P(B)+P(A_1A_2|\bar{B})P(\bar{B})]\\&=\frac{5}{2}\left(\frac{10}{50}\times\frac{9}{49}\times\frac{1}{2}+\frac{18}{30}\times\frac{17}{29}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{9}{49}+\frac{51}{29}\right)=0.4856\end{aligned}$$

习题 6-4

2. 已知 A，B 独立，且 $P(\bar{A}\bar{B})=\frac{1}{9}$，$P(\bar{A}B)=P(A\bar{B})$，求 $P(A)$，$P(B)$。

解　$P(\bar{A}B)=P(A\bar{B})$，由独立性可得

$$P(\bar{A})P(B)=P(A)P(\bar{B})$$
$$(1-P(A))P(B)=P(A)(1-P(B))$$
$$P(B)-P(A)P(B)=P(A)-P(A)P(B)$$

因此
$$P(A)=P(B)$$

再由 $P(\bar{A}\bar{B})=\frac{1}{9}$，得

$$\frac{1}{9}=P(\overline{A})P(\overline{B})=(1-P(A))(1-P(B))=(1-P(A))^2$$

$$1-P(A)=\frac{1}{3}$$

$$P(A)=P(B)=\frac{2}{3}$$

总习题 6

1. 选择题。

(1) 设事件 A,B 互不相容，$P(A)=p$，$P(B)=q$，则 $P(A\overline{B})=$(　　)。

A. pq　　B. $(1-p)q$　　C. q　　D. p

(2) 设事件 A,B 满足 $P(B|A)=1$，则下列正确的是(　　)。

A. A 是必然事件　　B. $P(B|\overline{A})=0$

C. $A\supset B$　　D. $P(A\overline{B})=0$

(3) 随机事件 A 和 B 相互独立，且 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{3}$，则 A 和 B 中仅有一个发生的概率为(　　)。

A. $\frac{5}{6}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{3}$

(4) 若 A,B 互斥，且 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则下列式子成立的是(　　)。

A. $P(A|B)=P(A)$　　B. $P(B|A)>0$

C. $P(AB)=P(A)P(B)$　　D. $P(B|A)=0$

2. 填空题。

(1) 设 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.4$，$P(A\overline{B})=0.3$，则 $P(A\cup B)=$________，$P(AB)=$________，$P(\overline{AB})=$________。

(2) 已知 $P(A)=P(B)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{6}$，则 $P(\overline{A}|\overline{B})=$________。

(3) 设 $P(A)=0.4$，$P(A+B)=0.7$，若 A,B 互不相容，则 $P(B)=$________；若 A,B 相互独立，则 $P(B)=$________。

(4) 设两个相互独立的事件 A 与 B 都不发生的概率为 0.64，A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，则 $P(B)=$________。

3. 计算题。

(1) 已知 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.3$，$P(A\cup B)=0.6$，求 $P(A\overline{B})$。

(2) 已知 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B)=\frac{3}{5}$，在下述不同条件下求 $P(\overline{A}B)$ 的值：

①A,B 互不相容；②$A\subset B$；③$P(AB)=\frac{1}{5}$。

(3) 已知 10 件产品中有 3 件次品，在其中取 2 次，每次任取 1 件，作不放回抽样，求

下列事件的概率：

①2 件都是正品；②1 件正品，1 件次品；③至少 1 件正品。

(4) 某商店出售的电灯泡由甲、乙两厂生产，其中甲厂的产品占 70%，乙厂的产品占 30%。已知甲厂产品的次品率为 4%，乙厂产品的次品率为 6%。一位顾客随机地取出 1 个电灯泡，求它是合格品的概率。

(5) 有 2 只盒子，甲盒中装有 2 只红球 7 只白球，乙盒中装有 6 只红球 3 只白球。某人任意取 1 只球，求取得红球的概率。

答案

1. (1) D　(2) D　(3) C　(4) D

2. (1) 0.7，0.2，0.8　(2) $\frac{7}{12}$　(3) 0.3，0.5　(4) 0.2

3. (1) 0.3　(2) ①$\frac{3}{5}$；②$\frac{7}{20}$；③$\frac{2}{5}$　(3) ①$\frac{7}{15}$；②$\frac{7}{15}$；③$\frac{14}{15}$

   (4) 0.954　(5) $\frac{4}{9}$

第7章

随机变量及其分布

7.1 基本要求

（1）了解随机变量的概念，掌握随机变量分布函数的概念和性质。

（2）理解离散型随机变量的分布律及其性质，掌握两点分布、二项分布、* 泊松分布。

（3）理解连续型随机变量的概率密度及其性质，掌握正态分布、均匀分布和 * 指数分布，能应用概率分布计算有关事件的概率，* 会求随机变量的分布函数。

*（4）会求简单随机变量函数的概率分布。

7.2 内容提要

1. 随机变量的定义

设随机试验 E 的样本空间为 $S=\{e\}$。如果对于每个 $e\in S$，都有一个实数 $X(e)$ 与它对应，则称 $X(e)$ 是一个随机变量，随机变量一般用 X,Y,Z 或 ξ,η,ζ 等表示。

2. 离散型随机变量

1）离散型随机变量的定义

随机变量 X 的所有可能取值是有限个或可列无限多个时，称 X 为离散型随机变量。

2）离散型随机变量的分布律的定义

$$P(X=x_k)=p_k \quad (k=1,2,\cdots)$$

或

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p_k	p_1	p_1	$\cdots$	p_1	$\cdots$

或 $$X\sim\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & p_k & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k & \cdots \end{pmatrix}$$

3）分布律的性质

（1）$p_k \geqslant 0 (k=1,2,\cdots)$

（2）$\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

4）常见的离散型随机变量的分布

（1）两点分布（0-1 分布）

$$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k} \quad (k=0,1;\ 0<p<1)$$

X	0	1
p_k	$1-p$	p

（2）二项分布

$$X \sim b(n,p)$$

$$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k=0,1,2,\cdots,n;\ 0<p<1)$$

（3）泊松分布

$$X \sim \pi(\lambda)$$

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad (k=0,1,2,\cdots;\ \lambda>0)$$

5）常见的离散型随机变量分布的关系

（1）当 $n=1$ 时二项分布即为两点分布。

*（2）当 n 很大 p 很小时，

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad (\lambda=np)$$

3. 分布函数

1）分布函数的定义

设 X 是一个随机变量，x 是任意实数，函数 $F(x)=P(X\leqslant x)$称为 X 的分布函数。

2）分布函数的性质

（1）$F(x)$是一个不减函数。

（2）$0\leqslant F(x)\leqslant 1$，$F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$。

（3）$F(x)$右连续，即 $\lim\limits_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0)$。

3）分布函数的求法

（1）离散型

$$F(x)=\sum_{x_k\leqslant x}p_k$$

（2）连续型

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x$$

4. 连续型随机变量

1）连续型随机变量的定义

如果存在非负可积函数 $f(x)$，使得 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = P(X\leqslant x)$，则称 X 为连续型随机变量，$f(x)$ 为 X 的概率密度函数或密度函数。

2）概率密度的性质

(1) $f(x)\geqslant 0$。

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$。

(3) $P(x_1 < x \leqslant x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t$。

(4) 若 $f(x)$ 在点 x 处连续，则有 $F'(x)=f(x)$。

3）常见的连续性随机变量的分布

(1) 均匀分布：若 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，则称 X 在区间(a,b)上服从均匀分布，记作 $X\sim U(a,b)$。

(2) 指数分布：若 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-x/\theta} & x>0 \\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$ $(\theta>0)$，则称 X 服从参数为 θ 的指数分布。

(3) 正态分布：若 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}(-\infty<x<+\infty)$，其中 μ 和 $\sigma(\sigma>0)$都是常数，则称 X 服从参数为 μ 和 σ 的正态分布，记作 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$。

$\mu=0,\sigma=1$ 的正态分布称为标准正态分布，记作 $X\sim N(0,1)$，标准正态分布函数为 $\Phi(x)$。

正态分布概率的计算公式为

$$P(a<X<b)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

*5. 随机变量的函数的分布

1）离散型

若 $P(X=x_k)=p_k(k=1,2,\cdots)$，$y_k=g(x_k)(k=1,2,\cdots)$，则

$$P(Y=y_k)=p_k\quad(k=1,2,\cdots)$$

2）连续型

设 X 具有概率密度 $f_X(x)(-\infty<x<+\infty)$，又设函数 $y=g(x)$处处可导，且恒有 $g'(x)>0$(或恒有 $g'(x)<0$)，则 $Y=g(X)$是一个连续型随机变量，它的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X[h(y)]\,|h'(y)| & a<y<b \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

其中，$a=\min\{g(-\infty),g(+\infty)\}$，$b=\max\{g(-\infty),g(+\infty)\}$，$x=h(y)$是 $y=g(x)$的反函数。

7.3　学习要点

本章学习的重点是随机变量的分布及概率计算。本章的计算涉及导数、积分的一些简单运算，技巧性不大，但注重在概念理解的基础上进行计算。要理解随机变量概念的引入背景。对于两类随机变量要掌握它们的特点，离散型随机变量要理解并会求分布律，连续型随机变量要理解概率密度函数及掌握相关性质。理解常见的随机变量的分布，尤其是正态分布，了解正态分布的标准化，会查标准正态分布表来计算概率。

7.4　例题增补

例 7-1　设随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=5a\left(\frac{1}{2}\right)^k(k=1,2,\cdots)$，求 a 及 $P(X\leqslant 2)$。

解　由 $\sum_{k=1}^{\infty}p_k=1$ 即 $\sum_{k=1}^{\infty}5a\left(\frac{1}{2}\right)^k=1$ 可得 $a=\frac{1}{5}$，则 X 的分布律为

$$P(X=k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k\quad(k=1,2,\cdots)$$

$$P(X\leqslant 2)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

例 7-2　设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=A+B\arctan x(-\infty<x<+\infty)$，求：

(1) 常数 A,B。

(2) 概率密度函数 $f(x)$。

分析　在求随机变量的分布函数中未知常数时，要利用分布函数的性质。

解　(1) 由分布函数性质知

$$F(+\infty)=A+B\lim_{x\to+\infty}\arctan x=A+\frac{\pi}{2}B=1$$

$$F(-\infty)=A+B\lim_{x\to-\infty}\arctan x=A-\frac{\pi}{2}B=0$$

得到
$$A=\frac{1}{2},\quad B=\frac{1}{\pi}$$

所以
$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}\arctan x\quad(-\infty<x<+\infty)$$

(2) 根据在连续点上 $f(x)=F'(x)$，得

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

例 7-3　已知随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}ax+b & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

且 $P\left(X>\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}$,求 X 的分布函数。

解 由 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$ 得 $\int_0^1 (ax+b)\mathrm{d}x = 1$,即 $\frac{a}{2}+b=1$。

又因为 $P\left(X>\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}$,即 $\int_{\frac{1}{2}}^1 (ax+b)\mathrm{d}x=\frac{3a}{8}+\frac{b}{2}=\frac{5}{8}$,联立解得

$$a=1,\quad b=\frac{1}{2}$$

所以

$$f(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{2} & 0<x<1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \int_0^x \left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x & 0\leqslant x<1 \\ 1 & x\geqslant 1 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{2}(x^2+1) & 0\leqslant x<1 \\ 1 & x\geqslant 1 \end{cases}$$

注 在求分布律或概率密度函数中的未知常数时,一般用分布律或密度函数的性质,密度函数为分段函数的随机变量。在求分布函数时,要记住积分上限是 x,且分布函数也是分段函数。

例 7-4 设期末考试各科的成绩(百分制)都服从于正态分布,结果数学考试的平均分为 72 分(即 μ 值),而 96 分以上的考生占 2.3%。试求随意抽取的一份试卷的成绩介于 60～84 分的概率。

解 设数学考试成绩为 X,则

$$X\sim N(72,\sigma^2)$$

$$P(X>96)=1-P(X\leqslant 96)=1-\Phi\left(\frac{96-72}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{24}{\sigma}\right)=0.023$$

即

$$\Phi\left(\frac{24}{\sigma}\right)=0.977$$

查标准正态分布表得

$$\Phi(2)\approx 0.9772$$

即

$$\frac{24}{\sigma}\approx 2,\quad \sigma\approx 12$$

所以

$$P(60\leqslant X\leqslant 84)=\Phi\left(\frac{84-72}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{60-72}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 0.6826$$

例 7-5　已知日光灯管的寿命 X 服从于参数为 3000 小时的指数分布。某教室中装有 10 支日光灯管,每天用 4 小时,求 150 天后教室中换过日光灯管的概率。

分析　由于 150 天内换过日光灯管的数目不确定,直接求换过日光灯管的概率不易,故应利用求未换过日光灯管的概率来求。

解　由题设得 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3000}e^{-\frac{x}{3000}} & x > 0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

则在 150 天内某支灯管未坏的概率为

$$P(X \geqslant 150 \times 4) = 1 - P(X < 600) = 1 - \int_0^{600} \frac{1}{3000} e^{-\frac{x}{3000}} dx = e^{-\frac{1}{5}}$$

设 A={换过日光灯管},则

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (e^{-\frac{1}{5}})^{10} \approx 0.8647$$

或者,设 Y 为 10 支中未换过的日光灯管数,则 $Y \sim b(10, e^{-\frac{1}{5}})$,则

$$P(A) = 1 - P(Y = 10) = 1 - C_{10}^{10}(1 - e^{-\frac{1}{5}})^0 (e^{-\frac{1}{5}})^{10} \approx 0.8647$$

例 7-6　已知 X 的分布律为 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$,求 $Y = 2X^2 + 1$ 的分布律和分布函数。

解　$Y = 2X^2 + 1$ 的所有可能取值为 1,3,9,且

$$P(Y = 1) = P(X = 0) = 0.2$$
$$P(Y = 3) = P(X = -1) + P(X = 1) = 0.1 + 0.3 = 0.4$$
$$P(Y = 9) = P(X = 2) = 0.4$$

故 Y 的分布律为 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$。

由分布函数的定义得 Y 的分布函数为

$$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = \begin{cases} 0 & y < 1 \\ 0.2 & 1 \leqslant y < 3 \\ 0.6 & 3 \leqslant y < 9 \\ 1 & y \geqslant 9 \end{cases}$$

注　求离散型随机变量的函数 Y 的分布应该先求 Y 的可能取值,再把与 Y 取值相应的 X 的取值的概率相加。

例 7-7　设 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

求 $Y = e^{-X}$ 的概率密度函数。

解　由 $y = e^{-x}$ 得 $x = -\ln y$,且 $x'_y = -\frac{1}{y} < 0$,故 $y = e^{-x}$ 为单调减函数。

由 $0<x<1$ 知 $e^{-1}<y<1$。由

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X[h(y)]\,|h'(y)| & a<y<b\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

得到

$$f_Y(y)=\begin{cases}2(-\ln y)\left|-\dfrac{1}{y}\right| & e^{-1}<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{2\ln y}{y} & e^{-1}<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

例 7-8 设 X 的分布函数 $F(x)$ 连续，求随机变量 $F(X)$ 的概率密度函数。

解 由分布函数的定义得 $F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(F(X)\leqslant y)$，由分布函数的性质可知 $0\leqslant F(x)\leqslant 1$，所以

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(F(X)\leqslant y)=P(\varnothing)=0$；

当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时，$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(F(X)\leqslant y)=P(X\leqslant F^{-1}(y))=F[F^{-1}(y)]=y$；

当 $y>1$ 时，$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(F(X)\leqslant y)=P(\Omega)=1$。

所以

$$f_Y(y)=F_Y{}'(y)=\begin{cases}1 & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

注 求随机变量的函数的分布时，当密度函数已知时，可以直接用公式来求，而当密度函数是抽象时可以像例 7-8 一样先求分布函数，再求概率密度函数。

7.5 教材部分习题解题参考

习题 7-2

1. 判断下列给出的数列是否是随机变量的分布律。

(2) $p_i=\dfrac{5-i^2}{6}(i=0,1,2,3)$

解 $p_3=\dfrac{5-3^2}{6}<0$，不满足条件 1)，故不是随机变量的分布律；

(4) $p_i=\dfrac{1+i}{25}(i=1,2,3,4,5)$

解 $\sum\limits_{i=1}^{5}p_i=\dfrac{20}{25}\neq 1$，故不是随机变量的分布律。

4. 一大楼装有 5 台同类型的供水设备。设每台设备是否被使用相互独立，调查表明在任一时刻 t 每台设备被使用的概率为 0.1。问：

(1) 在同一时刻，恰有 2 台设备被使用的概率是多少？

(2) 在同一时刻，至少有 3 台设备被使用的概率是多少？

(3) 在同一时刻,至多有 3 台设备被使用的概率是多少?

解 设同一时刻被使用的设备的个数为 X,则 $X \sim b(5, 0.1)$。

(1) $P(X=2)=C_5^2 \cdot 0.1^2 (1-0.1)^3=0.0729$

(2) $P(X \geqslant 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$

$=C_5^3 \cdot 0.1^3 (1-0.1)^2+C_5^4 \cdot 0.1^4 (1-0.1)+C_5^5 \cdot 0.1^5 (1-0.1)^0=0.00856$

(3) $P(X \leqslant 3)=1-P(X=4)-P(X=5)=0.99954$

5. 设随机变量 $X \sim b(6, p)$,已知 $P(X=1)=P(X=5)$,求 $P(X=2)$。

解 由 $X \sim b(6, p)$ 可得

$$P(X = k) = C_6^k p^k (1-p)^{6-k} \quad (k = 0,1,2,3,4,5,6)$$
$$P(X = 1) = C_6^1 p^1 (1-p)^{6-1} = 6p(1-p)^5$$
$$P(X = 5) = C_6^5 p^5 (1-p)^{6-5} = 6p^5(1-p)$$
$$6p(1-p)^5 = 6p^5(1-p)$$

解得 $p=\frac{1}{2}$,因此

$$P(X = 2) = C_6^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1-\frac{1}{2}\right)^{6-2} = \frac{15}{64}$$

习题 7-3

2. 设袋中有 5 个小球,其中有 2 个黑的,3 个白的。从中任取 3 个球,其中黑球数记为 X,求随机变量 X 的分布律和分布函数。

解 X 的所有可能取值为 0,1,2,其分布律为

$$P(X = 0) = \frac{C_3^3}{C_5^3} = 0.1, \quad P(X = 1) = \frac{C_2^1 C_3^2}{C_5^3} = 0.6, \quad P(X = 2) = \frac{C_2^2 C_3^1}{C_5^3} = 0.3$$

当 $x<0$,$(X \leqslant x)=\Phi$,$F(x)=0$;

当 $0 \leqslant x<1$,$F(x)=P(X \leqslant x)=P(X=0)=0.1$;

当 $1 \leqslant x<2$,$F(x)=P(X \leqslant x)=P(X=0)+P(X=1)=0.1+0.6=0.7$;

当 $x \geqslant 2$,$F(x)=P(X \leqslant x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1$。

所以,分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.1 & 0 \leqslant x < 1 \\ 0.7 & 1 \leqslant x < 2 \\ 1 & x \geqslant 2 \end{cases}$$

4. 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases} 0 & x<-1 \\ a & -1 \leqslant x<1 \\ \frac{2}{3}-a & 1 \leqslant x<2 \\ a+b & x \geqslant 2 \end{cases}$,且 $P(X=2)=\frac{1}{2}$,求:

(1) a 和 b 的值。

解 当$-1\leqslant x<1$,$F(x)=P(X\leqslant x)=P(X=-1)=a$

由

$$1\leqslant x<2,\quad F(x)=P(X\leqslant x)=P(X=-1)+P(X=1)=a+P(X=1)=\frac{2}{3}-a$$

得到
$$P(X=1)=\frac{2}{3}-2a$$

由
$$P(X=2)=1-P(X=-1)-P(X=1)=\frac{1}{2}$$

得到
$$P(X=-1)+P(X=1)=\frac{1}{2}$$

且
$$x\geqslant 2,\quad F(x)=P(X\leqslant x)=1=a+b$$

联合可得

$$\begin{cases}a+b=1\\ \dfrac{2}{3}-a=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

解得
$$a=\frac{1}{6},\quad b=\frac{5}{6}$$

习题 7-4

1. 设连续性随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ Ax^2 & 0\leqslant x<1\\ 1 & x\geqslant 1\end{cases}$,求:

(1) 系数 A。

解 由于 $F(x)$右连续,即 $\lim\limits_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0)$,可以得到

$$\lim_{x\to 1^+}F(x)=\lim_{x\to 1^+}Ax^2=A=F(1)=1$$

(2) $P\left(-1<X<\frac{1}{2}\right)$,$P\left(\frac{1}{3}<X\leqslant 2\right)$,$P\left(X>\frac{1}{5}\right)$。

解
$$P\left(-1<X<\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{1}{2}\right)-F(-1)=\frac{1}{4}$$

$$P\left(\frac{1}{3}<X\leqslant 2\right)=F(2)-F\left(\frac{1}{3}\right)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

$$P\left(X>\frac{1}{5}\right)=1-P\left(X\leqslant\frac{1}{5}\right)=1-F\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{24}{25}$$

(3) X 的概率密度函数。

解 概率密度函数为

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}2x & 0\leqslant x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

3. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}x & 0\leqslant x<1\\ 2-x & 1\leqslant x<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$,求:

(1) X 的分布函数。

解　X 的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & x<0\\ \int_0^x x\mathrm{d}x & 0\leqslant x<1\\ \int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_1^x(2-x)\mathrm{d}x & 1\leqslant x<2\\ 1 & x\geqslant 2\end{cases}$$

即

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{x^2}{2} & 0\leqslant x<1\\ 2x-\frac{x^2}{2}-1 & 1\leqslant x<2\\ 1 & x\geqslant 2\end{cases}$$

(2) 求 $P(X<0.5)$,$P(1.5<x<3)$。

解　$$P(X<0.5)=F(0.5)=0.125$$

$$P(1.5<x<3)=F(3)-F(1.5)=1-\left(2\times 1.5-\frac{1}{2}\times 1.5^2-1\right)=0.125$$

*4. 某种型号元件的寿命 X(小时)的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1000}{x^2} & x>1000\\ 0 & x\leqslant 1000\end{cases}$$

现有一大批此种元件(设各元件损坏与否相互独立),任取 5 件,问其中至少有 2 件寿命大于 1500 小时的概率是多少?

解　任取一件该种元件,其寿命大于 1500 小时的概率为

$$p=\int_{1500}^{+\infty}\frac{1000}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1000}{x}\bigg|_{1500}^{+\infty}=\frac{2}{3}$$

任取 5 件这种元件,其中寿命大于 1500 小时的件数记为 X,则 $X\sim b\left(5,\frac{2}{3}\right)$,故所求概率为

$$\begin{aligned}P(X\geqslant 2)&=1-P(X=0)-P(X=1)\\&=1-\left(1-\frac{2}{3}\right)^2-\mathrm{C}_5^1\cdot\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right)^4=\frac{232}{243}\end{aligned}$$

6. 设随机变量 X 在(1,6)上服从均匀分布,求方程 $t^2+Xt+1=0$ 有实根的概率。

解　t 的二次方程 $t^2+Xt+1=0$ 有实根的概率是它的判别式 $\Delta=X^2-4\geqslant 0$,即 $X\leqslant -2$ 或 $X\geqslant 2$。

由假设 $X\sim U(1,6)$,其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5} & 1<x<6\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

故方程有实根的概率为

$$p = P\{(X \leqslant -2) \cup (X \geqslant 2)\} = P(X \leqslant -2) + P(X \geqslant 2)$$
$$= \int_{-\infty}^{-2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{2}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{-2} 0\mathrm{d}x + \int_{2}^{6} \frac{1}{5}\mathrm{d}x = 0.8$$

7. 已知 $X \sim N(2,\sigma^2)$，且 $P(2<X<4)=0.3$，求 $P(X<0)$。

解 由

$$P(2 < X < 4) = \Phi\left(\frac{4-2}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{2-2}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) - \Phi(0) = 0.3$$

得到
$$\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) = 0.3 + \Phi(0) = 0.8$$

故
$$P(X<0) = \Phi\left(\frac{2-0}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) = 0.8$$

习题 7-5

3. 设连续性随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{10}{x^2} & x \geqslant 10 \\ 0 & x < 10 \end{cases}$$

求随机变量 $Y=3X-1$ 的概率密度。

解 由 $y=3x-1$ 得 $x=\dfrac{y+1}{3}$，$x'=\left(\dfrac{y+1}{3}\right)'=\dfrac{1}{3}$，故其概率密度为

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y+1}{3}\right)|x'_y| = \begin{cases} \dfrac{10}{\left(\dfrac{y+1}{3}\right)^2} \times \dfrac{1}{3} & \dfrac{y+1}{3} \geqslant 10 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{30}{(y+1)^2} & y \geqslant 29 \\ 0 & y < 29 \end{cases}$$

4. 对一圆片直径进行测量，其值服从(5,6)上的均匀分布，求圆片面积的概率密度函数。

解 设圆片直径为 X，面积为 Y，有 $Y=\dfrac{\pi}{4}X^2$。

X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 5 < x < 6 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

由 $Y=\dfrac{\pi}{4}X^2$ 可得，$X=\sqrt{\dfrac{4}{\pi}y}$，$X'=\dfrac{1}{\sqrt{\pi y}}$。故其概率密度为

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y+1}{3}\right)|x'_y| = \begin{cases} \dfrac{10}{\left(\dfrac{y+1}{3}\right)^2} \times \dfrac{1}{3} & \dfrac{y+1}{3} \geqslant 10 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi y}} & \dfrac{25\pi}{4} < y < 9\pi \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

总习题 7

1. 选择题。

(1) 已知 $P\{X=x_k\}=\dfrac{2}{a_k}(k=1,2,\cdots)$为一随机变量 X 的分布律的必要条件是(　　)。

A. x_k 非负　　B. x_k 为整数　　C. $0\leqslant a_k\leqslant 2$　　D. $a_k\geqslant 2$

(2) 设随机变量 X 的密度函数为 $\varphi(x)$,且 $\varphi(-x)=\varphi(x)$,$F(x)$是 X 的分布函数,则对任意实数 a,有(　　)。

A. $F(-a)=1-\int_0^a\varphi(x)\mathrm{d}x$　　B. $F(-a)=\dfrac{1}{2}-\int_0^a\varphi(x)\mathrm{d}x$

C. $F(-a)=F(a)$　　D. $F(-a)=2F(a)-1$

(3) 若要 $\varphi(x)=\cos x$ 可以成为随机变量 X 的概率密度函数,则 X 的可能取值区间为(　　)。

A. $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$　　B. $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$　　C. $[0,\pi]$　　D. $\left[\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{7\pi}{4}\right]$

2. 填空题。

(1) 已知随机变量 X 具有分布律

X	0	1	2
p_k	0.3	0.5	0.2

则概率 $P\{0\leqslant X\leqslant 1.5\}=$________。

(2) 已知随机变量 X 具有分布律

X	-1	0	1	2
p_k	0.2	0.3	0.1	0.4

其分布函数为 $F(x)$,则 $F(0)=$________。

(3) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{x^3} & 1<x<+\infty\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

则 $A=$________。

(4) 设随机变量 $X\sim N(2,\sigma^2)$,且 $P(2<X<4)=0.4$,则 $P(X<0)=$________。

3. 计算题。

(1) 设连续性随机变量 X 的分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-0.4x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$$

求：①$P\{X\leqslant 3\}$；②$P\{X=5\}$；③概率密度 $f_X(x)$。

(2) 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}x & 0\leqslant x<1\\ 2-x & 1\leqslant x<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求 X 的分布函数 $F(x)$。

(3) 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}k\mathrm{e}^{x} & x<0\\ \dfrac{1}{4} & 0\leqslant x<2\\ 0 & x\geqslant 2\end{cases}$$

求：①系数 k；②X 的分布函数；③$P\{X\leqslant 1\}$，$P\{X=1\}$，$P\{1<X<2\}$。

(4) 某台机器生产螺栓的长度 X(单位：cm)服从正态分布 $N(10.05,0.06^2)$，规定长度在(10.05 ± 0.12)cm 为合格品，求一螺栓为不合格品的概率。

(5) 设连续性随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi(x^2+1)} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$$

求随机变量 $Y=\ln X$ 的概率密度。

答案

1. (1) D　(2) B　(3) A

2. (1) 0.8　(2) 0.5　(3) 2　(4) 0.1

3. (1) ①$1-\mathrm{e}^{-1.2}$　②0　③$f_X(x)=\begin{cases}0.4\mathrm{e}^{-0.4x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$

(2) $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x^2}{2} & 0\leqslant x<1\\ 2x-\dfrac{x^2}{2}-1 & 1\leqslant x<2\\ 1 & x\geqslant 2\end{cases}$

(3) ①$k=\dfrac{1}{2}$　②$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x} & x<0\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{4} & 0\leqslant x<2\\ 1 & x\geqslant 2\end{cases}$　③$\dfrac{3}{4},0,\dfrac{1}{4}$

(4) 0.0456

(5) $f_Y(y)=\dfrac{2\mathrm{e}^{y}}{\pi(\mathrm{e}^{2y}+1)}(-\infty<y<+\infty)$

第8章

多维随机变量及其分布

8.1 基本要求

(1) 知道多维随机变量的概念,了解二维随机变量的联合分布函数的概念及意义。

(2) 理解二维离散型随机变量的联合分布律及其性质,掌握其边缘分布律。

(3) 理解二维连续型随机变量的联合概率密度的概念、性质及其边缘概率密度。

(4) 了解二维随机变量条件分布的概念,掌握随机变量独立性的概念,能够应用独立性进行概率计算。

(5) 会求两个随机变量的函数 $Z=X+Y$ 的分布。

8.2 内容提要

1. 二维随机变量的定义

设随机试验 E 的样本空间是 $S=\{e\}$,设 $X=X(e)$,$Y=Y(e)$是定义在 S 上的随机变量,由它们构成的一个二维向量(X,Y)叫作二维随机向量或二维随机变量。

2. 二维随机变量的联合分布函数

设(X,Y)是二维随机变量,对于任意实数 x 和 y,二元函数$F(x,y)=P(X\leqslant x,Y\leqslant y)$称为二维随机变量$(X,Y)$的联合分布函数。

二维随机变量(X,Y)的分布函数 $F(x,y)$在点(x_0,y_0)处的值$F(x_0,y_0)$表示随机点(X,Y)落在平面无限区域$\{(x,y)\mid -\infty<x\leqslant x_0,-\infty<y\leqslant y_0\}$(见图 8-1)内的概率。

图 8-1

3. 二维离散型随机变量

(1) 如果二维随机变量(X,Y)全部可能取到的、不相同的值是有限对或可列无限多对,则称(X,Y)是离散型随机变量。

（2）(X,Y)的联合分布律：

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}\quad (i,j=1,2,\cdots)$$

(X,Y)具有以下性质：

① $p_{ij}\geqslant 0(i,j=1,2,\cdots)$

② $\sum\limits_i\sum\limits_j p_{ij}=1$

（3）边缘分布律：

$$P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_{i\cdot}\quad (i=1,2,\cdots)$$

和

$$P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=p_{\cdot j}\quad (j=1,2,\cdots)$$

分别称为关于 X 和 Y 的边缘分布律。

4. 二维连续型随机变量

（1）对于二维随机变量(X,Y)的分布函数 $F(x,y)$，如果存在非负函数 $f(x,y)$，使对于任意的 x,y 有 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，则称$(X,Y)$是连续型的二维随机变量，函数 $f(x,y)$ 称为二维随机变量(X,Y)联合概率密度函数。

（2）$f(x,y)$具有以下性质：

① $f(x,y)\geqslant 0$。

② $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1\left(\iint\limits_{R^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1\right)$。

③ (X,Y)落在平面上的区域 G 内的概率为 $P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{G}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

（3）边缘概率密度：

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\,(-\infty<x<\infty)$称为$(X,Y)$关于 X 的边缘概率密度函数。

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\,(-\infty<y<\infty)$称为关于 Y 的边缘概率密度函数。

5. 二维随机变量(X,Y)的常见分布

1）均匀分布

设 G 是平面上的有界区域，其面积为 A。若二维随机变量(X,Y)具有如下概率密度：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A} & (x,y)\in G\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

则称(X,Y)在 G 上服从均匀分布。

*2）正态分布

设(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$$

其中的5个参数满足：$\mu_1,\mu_2,\sigma_1>0,\sigma_2>0,|\rho|<1$，则称$(X,Y)$服从二维正态分布，记作

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

*6. 条件分布

1）二维离散型随机变量的条件分布

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

称为$Y=y_j$的条件下，X取值的条件分布律；

$P\{Y=y_j|X=x_i\}=\dfrac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\dfrac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$称为$X=x_i$的条件下，$Y$取值的条件分布律。

2）二维连续型随机变量的条件概率密度

$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}(f_Y(y)>0)$称为在$Y=y$的条件下$X$的条件概率密度。

$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}(f_X(x)>0)$称为在$X=x$的条件下$Y$的条件概率密度。

7. 随机变量的独立性

(1) 设X与Y为两个随机变量，如果对任意的实数x和y，事件$\{X\leqslant x\}$和$\{Y\leqslant y\}$均相互独立，即$P(X\leqslant x,Y\leqslant y)=P(X\leqslant x)P(Y\leqslant y)$，则称随机变量$X$与$Y$相互独立。

(2) 相互独立的判别法。

① 离散型：$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$。

② 连续型：$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$。

*8. $Z=X+Y$的分布

$Z=X+Y$的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

或

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y$$

8.3 学习要点

本章学习的重点是二维随机变量的分布及概率计算。本章学习时要结合一维随机变量的知识而加以推广。注意二维与一维随机变量相同与不同的地方，重点了解二维随机变量的独立性及应用独立性解决简单的计算。

8.4 例题增补

例 8-1 设事件 A,B 满足 $P(A)=\frac{1}{4}, P(B|A)=P(A|B)=\frac{1}{2}$。令

$$X=\begin{cases}1 & \text{若 } A \text{ 发生}\\ 0 & \text{若 } A \text{ 不发生}\end{cases}, \quad Y=\begin{cases}1 & \text{若 } B \text{ 发生}\\ 0 & \text{若 } B \text{ 不发生}\end{cases}$$

试求 X 与 Y 的联合分布律。

分析 本题的关键是将随机变量的取值转化为已知事件，从而利用古典概率的基本知识计算所求概率。

解 由于

$$P(A)=\frac{1}{4}, \quad P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{2}, \quad P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{2}$$

故
$$P(AB)=\frac{1}{8}, \quad P(B)=\frac{1}{4}$$

而 $P(X=0,Y=0)=P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=\frac{5}{8}$

$$P(X=0,Y=1)=P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{8}$$

$$P(X=1,Y=0)=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{8}$$

$$P(X=1,Y=1)=P(AB)=\frac{1}{8}$$

从而得 X 与 Y 的联合分布律如下：

X \ Y	0	1
0	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

例 8-2 已知随机变量 X 与 Y 的分布律如下：

X	-1	0	1
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1
p_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

且 $P(XY=0)=1$。

(1) 求 X 与 Y 的联合分布律。

(2) 判断 X 与 Y 是否独立。

分析　由于 $P(XY=0)=1$,则有 $P(XY\neq 0)=0$,所以 $P(X=-1,Y=1)=P(X=1,Y=1)=0$,因此可以根据边缘分布律的性质写出 X 与 Y 的联合分布律。

解　(1) 由 $P(XY=0)=1$,知 $P(X=-1,Y=1)=P(X=1,Y=1)=0$。

于是

$$P(X=-1,Y=0)=P(X=-1)=\frac{1}{4}$$

$$P(X=0,Y=1)=P(Y=1)=\frac{1}{2}$$

$$P(X=1,Y=0)=P(X=1)=\frac{1}{4}$$

$$P(X=0,Y=0)=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=0$$

故 X 与 Y 的联合分布律如下:

X \ Y	0	1	$p_{i\cdot}$
-1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

(2) 由以上结果可见

$$P(X=0,Y=0)=0$$

而

$$P(X=0)P(Y=0)=\frac{1}{4}\neq 0$$

故 X 与 Y 不相互独立。

例 8-3　设(X,Y)的概率密度是 $f(x,y)=\begin{cases}k\mathrm{e}^{-(2x+3y)} & x>0,y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$,求:

(1) 常数 k。

(2) 联合分布函数 $F(x,y)$。

(3) $P(0<X\leqslant 1,0<Y\leqslant 2)$。

分析　该题要利用联合概率密度的性质$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$求得未知常数,然后根据概率密度的定义得到分布函数。

解　(1) 根据概率密度的性质,可知

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}k\mathrm{e}^{-(2x+3y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{k}{6}$$

故 $k=6$。

（2）当 $x>0,y>0$ 时，

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0}^{y}\int_{0}^{x}6\mathrm{e}^{-(2x+3y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(1-\mathrm{e}^{-2x})(1-\mathrm{e}^{-3y})$$

当 x,y 为其他情形时，$F(x,y)=0$。

故
$$F(x,y)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-2x})(1-\mathrm{e}^{-3y}) & x>0,y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

（3）利用分布函数的知识可得

$$\begin{aligned}P(0<X\leqslant 1,0<Y\leqslant 2)&=F(1,2)-F(1,0)-F(0,2)+F(0,0)\\&=(1-\mathrm{e}^{-2})(1-\mathrm{e}^{-6})\end{aligned}$$

也可用概率密度计算：

$$\begin{aligned}P(0<X\leqslant 1,0<Y\leqslant 2)=P[(X,Y)\in G]&=\iint\limits_{(X,Y)\in G}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{2}6\mathrm{e}^{-(2x+3y)}\mathrm{d}y=(1-\mathrm{e}^{-2})(1-\mathrm{e}^{-6})\end{aligned}$$

例 8-4 一整数 n 等可能地在 1,2,3,…,10 十个数中取一个值。设 $d=d(n)$ 是能整除 n 的正整数的个数，$f=f(n)$ 是能整除 n 的素数的个数，求 d 与 f 的联合分布律。

分析 本题的关键是弄清楚 d 与 f 的可能取值。经过逐个验算可知 d 与 f 的取值分别为 1,2,3,4 与 0,1,2，然后利用古典概率公式即可求出。

解 经过逐个验算可得 10 个整数的 d 与 f 的值如下：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d(n)$	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
$f(n)$	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2

故
$$P(d=1,f=0)=\frac{1}{10}$$
$$P(d=1,f=1)=0$$
$$P(d=1,f=2)=0$$
$$P(d=2,f=1)=\frac{4}{10}$$

其他可类似计算，得到 d 与 f 联合分布律如下：

f \ d	1	2	3	4
0	$\frac{1}{10}$	0	0	0
1	0	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$
2	0	0	0	$\frac{2}{10}$

例 8-5 设随机变量(X,Y)的密度为 $f(x,y)=\begin{cases} x^2+\dfrac{1}{3}xy & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$,求:

(1) (X,Y)的两个边缘概率密度。

(2) (X,Y)的两个条件概率密度。

(3) 概率 $P(X+Y>1)$,$P(Y>X)$。

解 (1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases} \int_0^2\left(x^2+\dfrac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}y=2x^2+\dfrac{2}{3}x & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases} \int_0^1\left(x^2+\dfrac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}y & 0\leqslant y\leqslant 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,有

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases} \dfrac{3x+y}{6x+2} & 0\leqslant y\leqslant 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

当 $0\leqslant y\leqslant 2$ 时,有

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases} \dfrac{6x^2+2xy}{2+y} & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(3) $P(X+Y>1)=P[(X,Y)\in G]=\iint\limits_{(X,Y)\in G}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^2\left(x^2+\frac{xy}{3}\right)\mathrm{d}y=\frac{65}{72} \quad \text{(见图 8-2)}$$

$P(Y>X)=P[(X,Y)\in G]=\iint\limits_{(X,Y)\in G}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^2\left(x^2+\frac{xy}{3}\right)\mathrm{d}y=\frac{17}{24} \quad \text{(见图 8-3)}$$

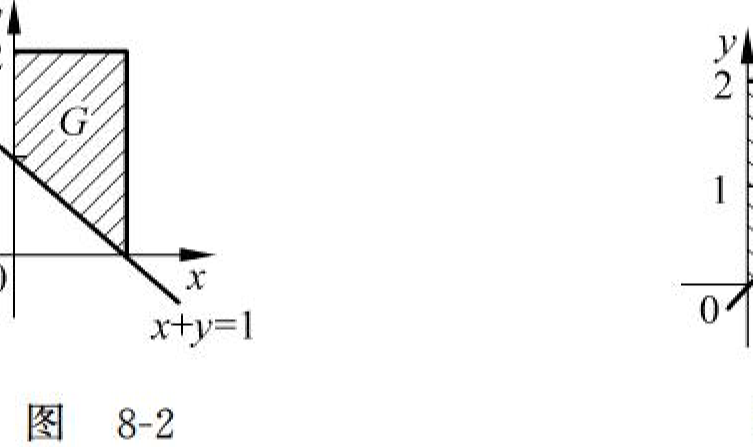


图 8-2

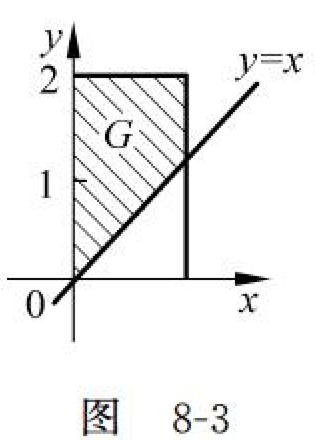


图 8-3

例 8-6 设 X 与 Y 相互独立且都服从于参数为 $\theta=1$ 的指数分布,求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

分析 该类题型直接利用卷积公式，结合图形注意区间划分即可。

解 由已知条件得

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases},\quad f(y)=\begin{cases}e^{-y} & y>0\\ 0 & y\leqslant 0\end{cases}$$

下面利用卷积公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$ 求解。

为确定积分限，先找出使被积函数不为 0 的区域（见图 8-4）：

$$\begin{cases}x>0\\ z-x>0\end{cases}\quad 即 \quad \begin{cases}x>0\\ x<z\end{cases}$$

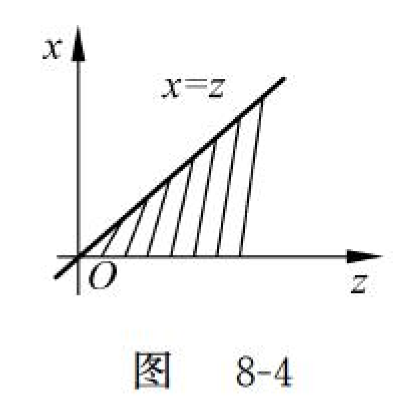


图 8-4

故当 $z<0$ 时，$f_Z(z)=0$；

当 $z>0$ 时，$f_Z(z)=\int_0^z e^{-x}\cdot e^{-(z-x)}\mathrm{d}x=ze^{-z}$。

故

$$f_Z(z)=\begin{cases}ze^{-z} & z>0\\ 0 & z\leqslant 0\end{cases}$$

8.5 教材部分习题解题参考

习题 8-1

3. 把一枚均匀硬币抛掷 3 次，设 X 为 3 次抛掷中正面出现的次数，而 Y 为正面出现次数与反面出现次数之差的绝对值，求：

(1) (X,Y)的分布律。

(2) $P(X=Y)$，$P(X>Y)$。

解 (1) (X,Y)可取值为$(0,3)$，$(1,1)$，$(2,1)$，$(3,3)$。

$$P(X=0,Y=3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

$$P(X=1,Y=1)=C_3^1\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

$$P(X=2,Y=1)=C_3^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

$$P(X=3,Y=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

故(X,Y)的分布律如下：

X \ Y	0	1
0	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$	0
2	$\frac{3}{8}$	0
3	0	$\frac{1}{8}$

(2) $P(X=Y)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=1)=\frac{3}{8}$

$$P(X>Y)=1-P(X\leqslant Y)$$
$$=1-P(X=0,Y=0)-P(X=0,Y=1)-P(X=1,Y=1)=\frac{7}{8}$$

5. 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}k(6-x-y) & 0<x<2,2<y<4\\ 0 & 其他\end{cases}$$

(1) 确定常数k。

(2) 求$P(X<1,Y<3)$。

(3) 求$P(X+Y\leqslant 4)$。

解 (1) 根据概率密度的性质可知

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_2^4\mathrm{d}y\int_0^2 k(6-x-y)\mathrm{d}x$$
$$=k\int_2^4\left[(6-y)x-\frac{1}{2}x^2\right]\Big|_0^2\mathrm{d}y=k\int_2^4(12-2y-2)\mathrm{d}y=8k$$

所以，$k=\frac{1}{8}$。

(2) $P(X<1,Y<3)=\int_2^3\mathrm{d}y\int_0^1\frac{1}{8}(6-x-y)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{8}\int_2^3\left[(6-y)x-\frac{1}{2}x^2\right]\Big|_0^1\mathrm{d}y=\frac{1}{8}\int_2^3\left(\frac{11}{2}-y\right)\mathrm{d}y=\frac{3}{8}$$

(3) 在$f(x,y)\neq 0$的区域$R:0\leqslant x\leqslant 2,2\leqslant y\leqslant 4$上作直线$x+y=4$，并记

$$G:\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,2\leqslant y\leqslant 4-x\}$$

则 $P(X+Y\leqslant 4)=P[(X,Y)\in G]$

$$=\iint_{(X,Y)\in G}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_2^4\mathrm{d}y\int_0^{4-y}\frac{1}{8}(6-x-y)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{8}\int_2^4\left[(6-y)x-\frac{1}{2}x^2\right]\Big|_0^{4-y}\mathrm{d}y=\frac{1}{8}\int_2^4\left[(6-y)(4-y)-\frac{1}{2}(4-y)^2\right]\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{8}\int_2^4\left[2(4-y)+\frac{1}{2}(4-y)^2\right]\mathrm{d}y=\frac{2}{3}$$

习题 8-2

1. 设(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}Cy(2-x) & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求：

(1) 常数 C 的值。

(2) X 和 Y 的边缘概率密度 $f_X(x),f_Y(y)$。

解 作出 $f(x,y)\neq 0$ 的区域，如图 8-5 所示。

图 8-5

(1) 由概率密度的性质知

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x Cy(2-x)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 C(2-x)\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^x\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{C}{2}(2x^2-x^3)\mathrm{d}x=\frac{5C}{24}$$

因此，$C=\frac{24}{5}$。

(2) $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^x\frac{24y}{5}(2-x)\mathrm{d}y=\frac{12x^2}{5}(2-x) & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_y^1\frac{24y}{5}(2-x)\mathrm{d}x=\frac{24}{5}y\left(\frac{3}{2}-2y+\frac{y^2}{2}\right) & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

习题 8-3

2. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，其概率分布分别如下，求 $P(X=Y)$及 $P(X<Y)$。

X	0	1
p_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	0	1
p_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

解 由 X 与 Y 相互独立的充分必要条件可知

$$P(X=0,Y=0)=P(X=0)P(Y=0)=\frac{1}{9}$$

$$P(X=0,Y=1)=P(X=0)P(Y=1)=\frac{2}{9}$$

由此可以得到联合分布律如下：

Y \ X	0	1
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$

故
$$P(X=Y)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=1)=\frac{5}{9}$$
$$P(X<Y)=P(X=0,Y=1)=\frac{2}{9}$$

*3. 设随机变量(X,Y)的联合概率密度为
$$f(x,y)=\begin{cases}6xy^2 & 0<x<1,0<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

(1) 判断 X 与 Y 是否相互独立。

(2) 求 $f_{X|Y}(x|y)$，$f_{Y|X}(y|x)$。

解　(1) $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^1 6xy^2\mathrm{d}y=2x & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^1 6xy^2\mathrm{d}x=3y^2 & 0<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

可见对任意的实数 x 与 y 均有
$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

故 X 与 Y 相互独立。

(2) 当 $0<x<1$ 时：
$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{6xy^2}{2x}=3y^2$$

当 $0<y<1$ 时：
$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{6xy^2}{3y^2}=2x$$

故当 $0<x<1$ 时：
$$f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}3y^2 & 0<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

可以看出
$$f_{Y|X}(y|x)=f_Y(y)$$

同样可得到 $f_{X|Y}(x|y)=f_X(x)$，也说明 X 与 Y 相互独立。

*4. 设随机变量 X 关于 Y 的条件概率密度为
$$f_{X|Y}(x\mid y)=\begin{cases}\frac{3x}{y^2} & 0<x<y\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

且已知 $f_Y(y)=\begin{cases}5y^4 & 0<y<1\\0 & 其他\end{cases}$，求 $P(X>0.3)$。

解 $f(x,y)=f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)=\begin{cases}15xy^2 & 0<x<y<1\\0 & 其他\end{cases}$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^x 15xy^2\mathrm{d}y=5x^4 & 0<x<1\\0 & 其他\end{cases}$$

故
$$P(X>0.3)=\int_{0.3}^{1}5x^4\mathrm{d}x=1-0.3^5$$

习题 8-4

1. 设随机变量(X,Y)的联合分布律如下：

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{9}$

求：

(1) $Z_1=X\cdot Y$ 的分布律。

(2) $Z_2=\max\{X,Y\}$的分布律。

解 (1) $X\cdot Y$ 所有可能取的值为：0,1,2,4。

$$P(Z_1=2)=P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)=\frac{2}{18}$$

类似可求出其他值，得到分布律如下：

Z_1	0	1	2	4
p_k	$\frac{11}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{4}{18}$

(2) $Z_2=\max\{X,Y\}$可能取的值为 0,1,2，其分布律如下：

Z_2	0	1	2
p_k	$\frac{1}{18}$	$\frac{9}{18}$	$\frac{8}{18}$

2. 设 X 与 Y 是两个相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

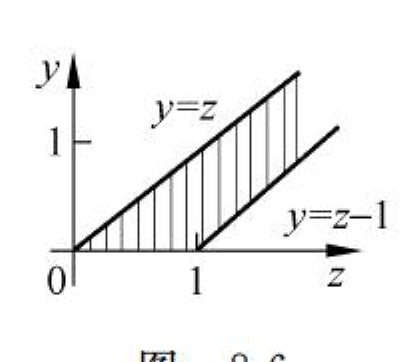


图　8-6

解　利用卷积公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y$ 找出使被积函数不为 0 的区域(见图 8-6)：

$$\begin{cases}y>0\\ 0\leqslant z-y\leqslant 1\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}y>0\\ z-1\leqslant y\leqslant z\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^z f_Z(z-y)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^z e^{-y}\mathrm{d}y=1-e^{-z} & 0\leqslant z<1\\ \int_0^z f_Z(z-y)f(y)\mathrm{d}y=\int_{z-1}^z e^{-y}\mathrm{d}y=(e-1)e^{-z} & z\geqslant 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

即

$$f_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-z} & 0\leqslant z<1\\ (e-1)e^{-z} & z\geqslant 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

3. 若 X 与 Y 独立，且具有共同的概率密度：

$$f(x)=\begin{cases}e^{1-x} & x>1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

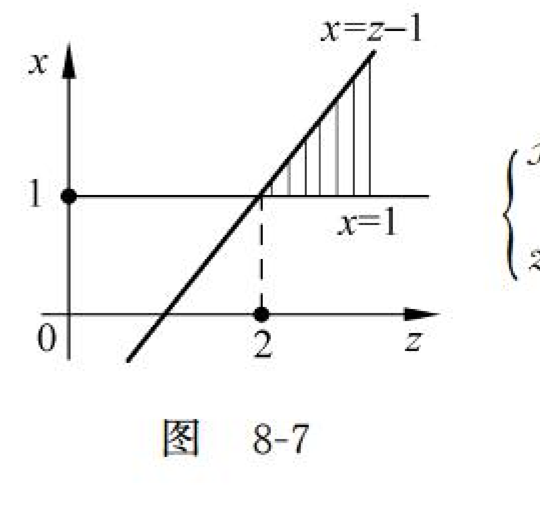


图　8-7

解　利用卷积公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$，由

$$\begin{cases}x>1\\ z-x>1\end{cases}\ \text{得}\begin{cases}x>1\\ x<z-1\end{cases}$$

(见图 8-7)，再由

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_1^{z-1}e^{1-x}e^{1-(z-x)}\mathrm{d}x=\int_1^{z-1}e^{2-z}\mathrm{d}x & z>2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

得

$$f_Z(z)=\begin{cases}e^{2-z}(z-2) & z>2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

总习题 8

1. 选择题。

(1) 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

则 $P(X<Y)=$（　　）。

A. $\int_0^1 dx\int_0^1 4xy\,dy$　　B. $\int_0^1 dx\int_x^1 4xy\,dy$

C. $\int_0^1 dx\int_0^x 4xy\,dy$　　D. $\int_0^1 dx\int_{-\infty}^x 4xy\,dy$

（2）设随机变量 X 和 Y 有相同的概率分布：

X	-1	0	1
p_k	0.25	0.50	0.25

并且满足 $P(XY=0)=1$，则 $P(X^2=Y^2)=$（　　）。

A. 0　　B. 0.25　　C. 0.5　　D. 1

2. 填空题。

（1）设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律如下：

(X,Y)	$(0,0)$	$(-1,1)$	$(-1,2)$	$(1,0)$
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$

则 X 的边缘分布律为________；Y 的边缘分布律为________。

（2）设平面区域 D 由曲线 $y=\frac{1}{x}$ 及直线 $y=0,x=1,x=e^2$ 围成，二维随机变量 (X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布，则 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度在 $x=2$ 处的值为________。

（3）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(-3,1)$，$Y\sim N(2,1)$，$Z=X-2Y+7$，则 $Z\sim$________。

3. 判断题。

（1）设 (X,Y) 是二维随机变量，事件 $\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}$ 表示事件 $\{X\leqslant x\}$ 与 $\{Y\leqslant y\}$ 的积事件。（　　）

（2）若 X 与 Y 都是标准正态随机变量，则 $X+Y\sim N(0,2)$。（　　）

（3）若 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(0,1)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $\frac{X+Y}{2}\sim N\left(0,\frac{1}{2}\right)$。（　　）

（4）若随机变量 X 与 Y 相互独立，则 $D(X-Y)=D(X)-D(Y)$。（　　）

（5）$E(XY)=E(X)E(Y)$ 是随机变量 X 与 Y 相互独立的必要而非充分条件。（　　）

4. 设二维随机变量 (X,Y) 具有联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}ke^{-(x+2y)} & x>0,y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

（1）确定常数 k。

（2）求 X,Y 的边缘概率密度。

(3) 判定 X 与 Y 是否相互独立。

(4) 求概率 $P\{Y\leqslant X\}$。

5. 设二维随机变量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}A & 0<x<2,|y|<x\\ 0 & 其他\end{cases}$$

(1) 求常数 A 的值。

(2) 求边缘概率密度 $f_X(x)$,$f_Y(y)$。

(3) 问 X 和 Y 是否独立?

*6. 已知随机变量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}Cx^2y & x^2\leqslant y\leqslant 1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

求:

(1) 常数 C。

(2) 条件密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$。

(3) 在条件 $y=0.5$ 下,X 的条件密度函数。

*7. 已知随机变量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4} & |x|<1,|y|<1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

求:

(1) 边缘概率密度 $f_X(x)$,$f_Y(y)$。

(2) 条件密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$。

答案

1. (1) B (2) A

2. (1)

X	-1	0	1
p_k	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$

Y	-1	0	1
p_k	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

(2) $\frac{1}{4}$ (3) $N(0,5)$

3. (1) √ (2) × (3) √ (4) × (5) √

4. (1) $k=2$ (2) $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & 其他\end{cases}$, $f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y} & y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$

(3) X 与 Y 相互独立 (4) $\frac{2}{3}$

5.（1）$A=\frac{1}{4}$

（2）$f_X(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & 0\leqslant x\leqslant 2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2+y}{4} & -2\leqslant y<0\\ \frac{2-y}{4} & 0\leqslant y<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

（3）不独立

*6.（1）$C=\frac{21}{4}$

（2）当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时，$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}1.5x^2y^{-\frac{3}{2}} & -\sqrt{y}<x<\sqrt{y}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

（3）$f_{X|Y}(x|y=0.5)=\begin{cases}3\sqrt{2}x^2 & -\sqrt{0.5}<x<\sqrt{0.5}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

*7.（1）$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & |x|<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & |y|<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

（2）$f_{X|Y}(x|y)=\frac{1}{2}$，$|x|<1$，$|y|<1$

第9章

随机变量的数字特征

9.1 基本要求

(1) 理解随机变量数字特征的概念,并会运用数字特征的基本性质计算具体分布的数字特征。

(2) 掌握常用分布的数字特征(数学期望、方差)。

(3) 了解二维随机变量的其他数字特征:协方差、相关系数、矩和分位数的概念。

(4) 了解大数定律及中心极限定理,能应用中心极限定理做简单的计算。

9.2 内容提要

1. 数学期望

1) 数学期望的定义

(1) 离散型随机变量的数学期望

设随机变量 X 的概率分布为 $P(X=x_k)=p_k(k=1,2,\cdots)$,称

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_k p_k + \cdots$$

为随机变量 X 的数学期望,简称期望或均值,记作 $E(X)$。

(2) 连续型随机变量的数学期望

设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$,若积分 $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛,则称此积分 $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 的值为 X 的数学期望,即 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x$。

2) 数学期望的性质

(1) $E(C)=C$(C 为任意常数)。

(2) $E(CX)=CE(X)$。

(3) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$。

*(4) 若 X,Y 相互独立，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$。

3）随机变量函数的数学期望

设 Y 是随机变量 X 的函数：$Y=g(X)$，$g(x)$ 为连续函数。

(1) 若离散型随机变量 X 的概率分布为 $P(X=x_k)=p_k(k=1,2,\cdots)$，则随机变量函数 Y 的数学期望为

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k$$

(2) 若连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，则随机变量函数 Y 的数学期望为

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x$$

2. 随机变量的方差

1）方差的定义

设 X 是一个随机变量，若 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 存在，称 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 为 X 的方差，记作 $D(X)$，即

$$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$$

称 $\sqrt{D(X)}$ 为 X 的均方差或标准差，记作 $\sigma(X)$。

2）方差的计算公式

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

3）方差的性质

(1) 设 C 是常数，则 $D(C)=0$。

(2) 若 C 是常数，则 $D(CX)=C^2D(X)$。

*(3) 设 X,Y 是两个随机变量，则

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

若 X,Y 相互独立，则

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$$

3. 常见随机变量的数学期望与方差（见表 9-1）

表 9-1

常见分布	$E(X)$	$D(X)$
0-1	p	$p(1-p)$
$X\sim b(n,p)$	np	$np(1-p)$
$X\sim\pi(\lambda)$	λ	λ
$X\sim U(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布	θ	θ^2
$X\sim N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2

4. 协方差

设(X,Y)为二维随机变量，若$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$存在，则称其为随机变量X与Y的协方差，记作$\mathrm{Cov}(X,Y)$，即

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

5. 相关系数

称$\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}(D(X)>0,D(Y)>0)$为随机变量$X$和$Y$的相关系数。

6. 矩

设X是随机变量，若$E(X^k)(k=1,2,\cdots)$存在，称它为X的k阶原点矩，简称k阶矩。若$E\{[X-E(X)]^k\}(k=2,3,\cdots)$存在，称它为$X$的$k$阶中心矩。

7. 独立同分布下的中心极限定理

设随机变量$X_1,X_2,\cdots X_n,\cdots$相互独立，服从同一分布，且具有数学期望和方差，$E(X_k)=\mu,D(X_k)=\sigma^2>0(k=1,2,\cdots)$，则随机变量之和$\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$的标准化变量

$$Y_n=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}X_k-E\left(\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\right)}}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

的分布函数$F_n(x)$对于任意x满足

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\leqslant x\right)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t=\Phi(x)$$

9.3 学习要点

本章的主要内容是随机变量的数字特征，要掌握数学期望和方差的概念和计算，牢记常见随机变量的数学期望和方差，并且能够利用期望与方差的性质进行概率或随机变量函数的期望与方差的计算。

9.4 例题增补

例 9-1 已知$X\sim N(-2,\ 0.4^2)$，求$E(X+3)^2$。

解 由数学期望的性质得

$$\begin{aligned}E(X+3)^2&=E(X^2+6X+9)=E(X^2)+6E(X)+9\\&=D(X)+E^2(X)+6E(X)+9=0.16+4+6\times(-2)+9=1.16\end{aligned}$$

注　在期望和方差的有关计算中，经常要用到方差的计算公式 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$ 来计算 $E(X^2)$，即 $E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2$。注意公式的灵活使用。

例 9-2　盒中有 7 只球，其中 4 只白球，3 只黑球，从中任取 3 只球，求抽到白球数 X 的数学期望和方差。

解　X 的概率分布为

X	0	1	2	3
p_k	$\frac{C_3^3}{C_7^3}$	$\frac{C_4^1C_3^2}{C_7^3}$	$\frac{C_4^2C_3^1}{C_7^3}$	$\frac{C_4^3}{C_7^3}$

故
$$E(X)=\frac{12}{7},\quad D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{24}{49}$$

例 9-3　已知随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ \frac{x}{4} & 0<x\leqslant 4\\ 1 & x>4\end{cases}$，求 $E(X)$ 和 $D(X)$。

解　X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4} & 0<x\leqslant 4\\ 0 & 其他\end{cases}$，则

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^4\frac{x}{4}\mathrm{d}x=\frac{x^2}{8}\Big|_0^4=2$$
$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^4\frac{x^2}{4}\mathrm{d}x=\frac{x^3}{12}\Big|_0^4=\frac{16}{3}$$
$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{4}{3}$$

例 9-4　设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 0.2 & 0\leqslant x<1\\ 0.5 & 1\leqslant x<2\\ 1 & x>2\end{cases}$，求 $D\left(\frac{X}{2+X^2}\right)$。

解　由题设，X 为离散型随机变量，其分布律为

X	0	1	2
p_k	0.2	0.3	0.5

则
$$E\left(\frac{X}{2+X^2}\right)=0\times 0.2+\frac{1}{2+1^2}\times 0.3+\frac{2}{2+2^2}\times 0.5=\frac{4}{15}$$
$$E\left(\frac{X}{2+X^2}\right)^2=\left(\frac{0}{2+0^2}\right)^2\times 0.2+\left(\frac{1}{2+1^2}\right)^2\times 0.3+\left(\frac{2}{2+2^2}\right)^2\times 0.5=\frac{4}{45}$$

故
$$D\left(\frac{X}{2+X^2}\right)=E\left(\frac{X}{2+X^2}\right)^2-E^2\left(\frac{X}{2+X^2}\right)=\frac{4}{45}-\left(\frac{4}{15}\right)^2=\frac{4}{225}$$

例 9-5　设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c & 0<x<1\\0 & \text{其他}\end{cases}$$

已知 $E(X)=0.5, D(X)=0.15$，求系数 a,b,c。

解　由于 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$，故 $\int_0^1(ax^2+bx+c)\mathrm{d}x=1$，得到 $\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+c=1$。

由 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x(ax^2+bx+c)\mathrm{d}x=0.5$，有 $\frac{1}{4}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{2}c=0.5$。

而 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$，故得 $E(X^2)=0.4$。

又 $\int_0^1 x^2(ax^2+bx+c)\mathrm{d}x=0.4$，即 $\frac{1}{5}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{3}c=0.4$。联立三式解得

$$a=12,\quad b=-12,\quad c=3$$

例 9-6　某箱装有 100 件产品，其中一等品、二等品和三等品分别为 80 件，10 件和 10 件。现从中随机抽取一件，设

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{抽到 } i \text{ 等品}\\0 & \text{其他}\end{cases}\quad(i=1,2,3)$$

求：

(1) 随机变量 X_1 与 X_2 的联合分布律。

(2) 随机变量 X_1 与 X_2 的相关系数。

分析　本题的关键在于将随机变量的取值转化为随机事件。

解　(1) 设事件 A_i=抽到 i 等品($i=1,2,3$)，A_1,A_2,A_3 两两互不相容，且有

$$P(A_1)=0.8, P(A_2)=P(A_3)=0.1$$

可知联合分布律为

$$P(X_1=0,X_2=0)=P(A_3)=0.1$$
$$P(X_1=0,X_2=1)=P(A_2)=0.1$$
$$P(X_1=1,X_2=0)=P(A_1)=0.8$$
$$P(X_1=1,X_2=1)=P(\varnothing)=0$$

(2) $E(X_1)=0.8$，$E(X_2)=0.1$，$D(X_1)=0.16$，$D(X_2)=0.09$。

由于 X_1X_2 的取值为 0,1 的概率分别为 1,0，故有

$$E(X_1X_2)=0\times1+1\times0=0$$
$$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)=-0.08$$
$$\rho_{X_1X_2}=\frac{\mathrm{Cov}(X_1,X_2)}{\sqrt{D(X_1)D(X_2)}}=\frac{-0.08}{\sqrt{0.16\times0.09}}=-\frac{2}{3}$$

例 9-7　设 $X_1\sim N(1,2^2)$，$X_2\sim N(1,3^2)$，$X_3\sim N(1,15)$，且 X_1,X_2,X_3 相互独立，求 $P(X_1>-2X_2-2X_3+15)$。

分析　本题利用正态分布的可加性求解。若 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 n 个相互独立的服从 $N(\mu_i,\sigma_i^2)$ 分布的随机变量，则 $\sum_{i=1}^{n}X_i$ 仍然是一个服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机变量，并且参数为

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i, \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$$

解 $P(X_1 > -2X_2 - 2X_3 + 15) = P(X_1 + 2X_2 + 2X_3 > 15)$

设 $Y = X_1 + 2X_2 + 2X_3$，由于 X_1, X_2, X_3 相互独立，且都服从正态分布，由此得

$$Y \sim N(5, 10^2)$$

故

$$P(Y > 15) = 1 - P(Y \leqslant 15) = 1 - \Phi\left(\frac{15-5}{10}\right) = 0.1587$$

例 9-8 一生产线生产的产品成箱包装，每箱的重量是随机的。假设每箱平均重 50 千克，标准差为 5 千克。若用最大载重量为 5 吨的汽车承运，试利用中心极限定理说明每辆车最多可装多少箱，才能保证不超载的概率大于 0.977。

解 设 $X_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是装运第 i 箱的重量（千克），n 是所求箱数。由条件可以把 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 看作独立同分布的随机变量，n 箱的总重量 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ 是独立同分布的随机变量之和。由已知条件可得

$$E(X_i) = 50, \quad D(X_i) = 5^2, \quad E(X) = 50n, \quad D(X_i) = 25n$$

根据中心极限定理得

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\text{近似}}{\sim} N(50n, 25n)$$

要求

$$P(X \leqslant 5000) \approx \Phi\left(\frac{5000 - 50n}{5\sqrt{n}}\right) > 0.977 = \Phi(2)$$

由此可见

$$\frac{5000 - 50n}{5\sqrt{n}} > 2$$

解得

$$n < 98.0199$$

故最多可装 98 箱。

9.5 教材部分习题解题参考

习题 9-1

2. 在射击比赛中，每人射击 4 次，规定全部击不中得 0 分；只击中 1 发得 10 分；击中 2 发得 20 分；击中 3 发得 30 分；全部击中得 50 分。若某射手每次射击的命中率为 0.7，求此射手得分的数学期望。

解 设此射手击中的次数为 X，则 $X \sim b(4, 0.7)$，故 X 的概率分布为

$$P(X = k) = C_4^k \cdot 0.7^k (1 - 0.7)^{4-k} = C_4^k \cdot 0.7^k \cdot 0.3^{4-k} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4)$$

设此人得分为 Y,则 X 与 Y 的概率分布如下：

X	0	1	2	3	4
Y	0	10	20	30	50
p_k	0.0081	0.0756	0.2646	0.4116	0.2401

则射手得分的数学期望为

$$E(Y)=10\times 0.0756+20\times 0.2646+30\times 0.4116+50\times 0.2401=30.401$$

4. 设某车间生产的圆盘直径服从(1,2)上的均匀分布,试求圆盘面积的数学期望。

解　设圆盘直径为 X,则 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}1 & 1<x<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

圆盘的面积为 $Y=\frac{\pi X^2}{4}$,所以面积的数学期望为

$$E(Y)=E\left(\frac{\pi X^2}{4}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\pi x^2}{4}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{\pi x^2}{4}\mathrm{d}x=\left.\frac{\pi x^3}{12}\right|_1^2=\frac{7\pi}{12}$$

*5. 将 n 只球($1\sim n$)随机地放进 n 个盒子($1\sim n$)中去,一个盒子装一只球。若一只球装入与球同号的盒子中,称为一个配对。记 X 为总的配对数,求 $E(X)$。

解　设随机变量

$$X_i=\begin{cases}0 & (\text{若第 } i \text{ 号球装入第 } i \text{ 号盒子中})\\ 1 & (\text{若第 } i \text{ 号球未装入第 } i \text{ 号盒子中})\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n$$

则总的配对数 X 可以表示成

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_n$$

$$P(X_i=0)=1-\frac{1}{n},\quad P(X_i=1)=\frac{1}{n}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

由此

$$E(X_i)=\frac{1}{n}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

故

$$E(X)=E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)=1$$

习题 9-2

1. 一台设备由三大部件构成,在设备运转过程中各部件需要调整的概率相应为0.1,0.2,0.3。假设各部件的状态相互独立,以 X 表示同时需要调整的部件数,求 X 的数学期望和方差。

解　X 可能的取值为0,1,2,3。

$$P(X=0)=0.9\times 0.8\times 0.7=0.504$$

$$P(X=1)=0.1\times 0.8\times 0.7+0.9\times 0.2\times 0.7+0.9\times 0.8\times 0.3=0.398$$

$$P(X=2)=0.1\times 0.2\times 0.7+0.9\times 0.2\times 0.3+0.1\times 0.8\times 0.3=0.092$$

$$P(X=3)=0.1\times 0.2\times 0.3=0.006$$

则有

$$E(X)=0\times 0.504+1\times 0.398+2\times 0.092+3\times 0.006=0.6$$

$$E(X^2)=0\times 0.504+1\times 0.398+2^2\times 0.092+3^2\times 0.006=0.82$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=0.46$$

3. 已知随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且 $E[(X-1)(X-2)]=1$，求 λ。

解　由 X 服从参数为 λ 的泊松分布，得 $E(X)=D(X)=\lambda$，且

$$E(X^2)=D(X)+E^2(X)=\lambda+\lambda^2$$

$$E[(X-1)(X-2)]=E(X^2)-3E(X)+2=1$$

故　$$\lambda^2-2\lambda+1=0,\quad \lambda=1$$

5. 设长方形的长 X 服从区间(0,2)上的均匀分布，已知长方形的周长为 20m。求长方形面积的数学期望和方差。

解　设长方形的面积为 $Y=X(10-X)$。

由于 $X\sim U(0,2)$，X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & 0<x<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

故 $$E(Y)=E[X(10-X)]=\int_0^2\frac{1}{2}x(10-x)\mathrm{d}x=\left(\frac{5}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3\right)\Big|_0^2=\frac{26}{3}=8.67$$

$$E(Y^2)=E[X^2(10-X)^2]=\int_0^2\frac{1}{2}x^2(10-x)^2\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^2\frac{1}{2}(100x^2-20x^3+x^4)\mathrm{d}x=\frac{1448}{15}=96.53$$

$$D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=21.42$$

6. 国际市场上每年对我国某种出口商品的需求量是随机变量 X(单位：吨)，X 服从(2000,4000)上的均匀分布。设每售出这种商品 1 吨，可获得外汇 3 万元；但若销售不出而囤积于仓库，则每 1 吨需保养费 1 万元。问：需组织多少货源，才能使平均收益达到最大？

解　设收益为 Y(万元)，需要进货 m 吨，由题设可知

$$Y=\begin{cases}3X-(m-X) & (x<m)\\ 3m & (x\geqslant m)\end{cases}$$

则　$$E(Y)=\int_{2000}^{m}\frac{1}{2000}(4x-m)\mathrm{d}x+\int_m^{4000}\frac{3m}{2000}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{1000}(m^2-7000m+4\times 10^6)$$

要使平均收益达到最大，则对 $E(Y)$ 求导，得

$$E(Y)'=-\frac{1}{1000}(2m-7000)=0$$

解得 $m=3500$，即当 $m=3500$ 时，$E(Y)$ 达到最大值 8250，因此进货量应为 3500 吨。

习题 9-4

1. 根据以往的经验，某种电器元件的寿命服从均值为 100 小时的指数分布。现随机取 16 只，设它们的寿命是相互独立的，求这 16 只元件寿命的总和大于 1920 小时的概率。

解　设第 i 只元件的寿命为 $X_i(i=1,2,\cdots,16)$，则

$$E(X_i)=100,\quad D(X_i)=100^2\quad(i=1,2,\cdots,16)$$

16 只元件的寿命为

$$X=\sum_{i=1}^{16}X_i\overset{\text{近似}}{\sim}N(16\times100,16\times100^2)$$

$$P(X>1920)=1-P(X\leqslant1920)\approx1-\Phi\left(\frac{1920-16\times100}{\sqrt{16\times100^2}}\right)$$

$$=1-\Phi(0.8)=0.2119$$

2. 一加法器同时收到 20 个噪声电压 $X_i(i=1,2,\cdots,20)$。设它们是相互独立的随机变量，且都服从(0,10)的均匀分布。记 $X=\sum_{i=1}^{20}X_i$，求 $P(X>105)$。

解　$E(X_i)=5,\quad D(X_i)=\dfrac{100}{12}\quad(i=1,2,\cdots,20)$

$$X=\sum_{i=1}^{20}X_i\overset{\text{近似}}{\sim}N\left(20\times5,20\times\frac{100}{12}\right)$$

$$P(X>105)=1-P(X\leqslant105)\approx1-\Phi\left(\frac{105-20\times5}{\sqrt{20\times\frac{100}{12}}}\right)$$

$$=1-\Phi(0.387)=0.348$$

总习题 9

1. 选择题。

(1) 已知随机变量 X 服从二项分布且 $E(X)=2.4$，$D(X)=1.68$，则二项分布的参数 n,p 的值为(　　)。

A. $n=4,p=0.6$　B. $n=8,p=0.3$　C. $n=7,p=0.3$　D. $n=5,p=0.6$

(2) 已知随机变量 X 服从均匀分布 $X\sim U(a,b)$，$E(X)=8$，$D(X)=12$，则参数 a,b 的值为(　　)。

A. $a=2,b=14$　B. $a=14,b=2$　C. $a=8,b=12$　D. $a=12,b=8$

(3) 设 $X\sim N(-3,1)$，$Y\sim N(2,1)$，X,Y 相互独立，则 $D(2X-3Y)=$(　　)。

A. 5　　B. -1　　C. 13　　D. 7

2. 填空题。

(1) 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	0	2
p_k	0.4	0.3	0.3

则 $E(X^2)=$________。

(2) 设 X 服从均匀分布 $X\sim U(1,3)$，则 $E(2X)=$________。

(3) 设 X 服从泊松分布 $X\sim\pi(2)$，则 $E(3X-2)=$________。

*(4) 设 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,3^2)$，X,Y 相互独立，则 $P\{X<0\}=$________，$X+2Y\sim$________。

3. 计算题。

(1) 设随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=\frac{1}{10}(k=2,4,6,\cdots,20)$，求 $E(X)$和 $D(X)$。

(2) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ ax+b & 0\leqslant x\leqslant\pi\\ 1 & x>\pi\end{cases}$。

①求常数 a,b；②求 $E(X)$和 $D(X)$；③设 $Y=\sin X$，求 $E(Y)$。

答案

1. (1) B　(2) A　(3) C

2. (1) 2.8　(2) 4　(3) 4　(4) 0.5，$N(2,37)$

3. (1) 11，33

(2) ①$a=\frac{1}{\pi}$，$b=0$；②$E(X)=\frac{\pi}{2}$，$D(X)=\frac{\pi^2}{12}$；③$E(Y)=\frac{2}{\pi}$

第10章

数理统计

10.1 基本要求

(1) 理解总体、个体、简单随机样本和统计量的概念,掌握正态总体的样本均值、样本方差的计算,了解 χ^2 分布、t 分布的定义及性质,会查表计算各分布的分位数。

(2) 理解点估计的概念,掌握矩估计法和极大似然估计法,了解估计量的评选标准(无偏性、有效性、一致性),理解区间估计的概念,会求单个正态总体的均值和方差的置信区间。

(3) 理解显著性检验的基本思想,掌握假设检验的基本步骤,了解假设检验可能产生的两类错误,了解单个正态总体的均值和方差的假设检验。

10.2 内容提要

1. 总体、个体和样本

(1) 总体:被研究的对象的某项数量指标 X 取值的全体。

(2) 个体:总体中的每个数量称为个体。

(3) 样本:从总体中随机抽取的若干个体。

2. 简单随机样本

设总体为 X,则容量为 n 的样本用随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 表示。若 $X_i(i=1,2,\cdots)$相互独立且与总体 X 同分布,则称 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为简单随机样本(简称样本)。

3. 统计量

1) 统计量的定义

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本,则称不含未知参数的样本的连续函数

$g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为统计量。

2）常用统计量

（1）样本均值 ——$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$；

观察值 —— $\overline{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$。

（2）样本方差 ——$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\dfrac{1}{n-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)$；

观察值 ——$s^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\dfrac{1}{n-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}{x_i}^2-n\overline{x}^2\right)$。

（3）样本标准差 ——$S=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$；

观察值 ——$s=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$。

（4）样本阶原点矩 ——$A_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k(k=1,2,\cdots)$；

观察值 ——$a_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^k$。

（5）样本 k 阶中心矩 ——$B_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k(k=1,2,\cdots)$；

观察值 ——$b_k=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^k$。

4. 统计推断中常用的分布

1）χ^2 分布

（1）定义：设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，都服从正态分布 $N(0,1)$，则称随机变量 $\chi^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$ 所服从的分布为自由度为 n 的 χ^2 分布，记作 $\chi^2\sim\chi^2(n)$。

（2）性质：$E(\chi^2)=n,D(\chi^2)=2n$。

（3）上 α 分位点：对于给定的正数 $\alpha(0<\alpha<1)$，称满足条件 $P\{\chi^2>\chi_\alpha^2(n)\}=\int_{\chi_\alpha^2(n)}^{\infty}f(y)\mathrm{d}y=\alpha$ 的点 $\chi_\alpha^2(n)$ 为 $\chi^2(n)$ 分布的上 α 分位点。

2）t 分布

（1）定义：设 $X\sim N(0,1),Y\sim\chi^2(n)$，且 X 与 Y 相互独立，则称变量 $t=\dfrac{X}{\sqrt{\dfrac{Y}{n}}}$所服从的分布为自由度为 n 的 t 分布，记作 $t\sim t(n)$。

（2）上 α 分位点：对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，称满足条件 $p\{t>t_\alpha(n)\}=\alpha$ 的点 $t_\alpha(n)$为 $t(n)$分布的上 α 分位点。

(3) 性质：$t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)$。

3) F 分布

设 $U\sim\chi^2(n_1)$，$V\sim\chi^2(n_2)$，U 与 V 相互独立，则称随机变量 $F=\dfrac{\frac{U}{n_1}}{\frac{V}{n_2}}$ 服从自由度为 n_1 及 n_2 的 F 分布，记作 $F\sim F(n_1,n_2)$。

5. 正态总体的常见统计量的分布

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，$\overline{X}$，S^2 分别是样本均值和样本方差，则有

(1) $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

(2) $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

(3) $Y=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

其中，$t(n-1)$ 表示自由度为 $n-1$ 的 t 分布，$\chi^2(n-1)$ 表示自由度为 $n-1$ 的 χ^2 分布。

6. 参数估计

1) 点估计

(1) 定义

设总体 X 分布函数为 $F(x)=F(x,\theta)$，其中 θ 为未知参数。现从该总体 X 抽取容量为 n 的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，依据该样本构造样本的一个统计量 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 来估计参数 θ，则称统计量 $\hat{\theta}$ 为参数 θ 的点估计量。

(2) 矩估计法

设总体 X 的分布中含有 m 个未知参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$，$X$ 的阶原点矩为 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m(k=1,2,\cdots,m)$。令 $\mu_k=\mu_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)=A_m=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k(k=1,2,\cdots,m)$，在此方程组中解出 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$，则 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(A_1,A_2,\cdots,A_m)$，$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(A_1,A_2,\cdots,A_m)$，$\cdots$，$\hat{\theta}_m=\hat{\theta}_m(A_1,A_2,\cdots,A_m)$ 称为 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$ 的矩估计量。

(3) 最大似然估计法

① 似然函数：设总体 X 是离散型随机变量，其概率分布为 $P(X=x_i)=p(x_i,\theta)$ $(i=1,2,\cdots)$，其中 θ 是待估参数。设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，则称函数 $L(\theta)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$ 为样本的似然函数。

设总体 X 是连续型随机变量，其概率密度为 $f(x,\theta)$，其中 θ 是待估参数。设 X_1，$X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，则称函数 $L(\theta)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$ 为

样本的似然函数。

② 最大似然估计：若有 $\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$能使 $L(\theta)$达到最大值，则称 $\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$为 θ 的最大似然估计值，称 $\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$为 θ 的最大似然估计量。

③ 估计步骤：构造似然函数 $L(\theta)$，取对数得 $\ln L(\theta)$；对 θ 求导得对数似然方程 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$；解方程得 θ 的最大似然估计量。

（4）估计量的评选标准

① 无偏性：设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$是未知参数 θ 的估计量，若 $E(\hat{\theta})=\theta$，则 $\hat{\theta}$ 称为 θ 的无偏估计量。

② 有效性：设 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,\cdots,X_n)$和 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,\cdots,X_n)$都是参数 θ 的无偏估计量，若有 $D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$，则称 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 有效。

2）区间估计

（1）置信区间：设总体 X 的分布中含有未知参数 θ，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本。对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，若由样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 确定的两个统计量 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，$\bar{\theta}=\bar{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$满足 $P(\underline{\theta}<\theta<\bar{\theta})=1-\alpha$，则称区间$(\underline{\theta},\bar{\theta})$是 θ 的置信水平（置信度）为 $1-\alpha$ 的置信区间。$\underline{\theta}$ 和 $\bar{\theta}$ 分别称为置信下限和置信上限。

（2）常用单个正态总体均值与方差的置信区间见表 10-1。

表 10-1

待估参数	其他参数	统计量及其分布	置信区间
μ	σ^2	$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$
μ	σ^2	$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$
σ^2	μ	$Y=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$

7．假设检验

1）基本思想

为了对总体分布中的未知参数做出推断，首先对其提出一个假设 H_0，然后在 H_0 为真的条件下，通过选取恰当的统计量来构造一个小概率事件。若在一次试验中，小概率事件发生了，就完全有理由拒绝 H_0 的正确性；否则没有充分理由拒绝 H_0 的正确性，从而接受 H_0。

2）假设检验的两类错误

（1）在假设 H_0 实际为真时，而错误地拒绝了 H_0，称为犯了第一类错误（以真为假）。

（2）当 H_0 实际上不真时，却错误地接受了 H_0，称为犯了第二类错误（以假乱真）。

3）假设检验的步骤

（1）依据实际问题的要求，提出原假设 H_0 与备择假设 H_1。

（2）选取适当的统计量，并在 H_0 为真的条件下确定该统计量的分布。

（3）根据问题要求确定显著性水平 α，得到拒绝域。

（4）由样本值计算统计量的观测值，看是否属于拒绝域，从而确定接受还是拒绝 H_0。

4）正态总体均值和方差的假设检验

常用总体参数的假设经验表见表 10-2。

表　10-2

原假设 H_0	备择假设 H_1	统计量及其分布	拒　绝　域
$\mu=\mu_0$（σ^2 已知）	$\mu\neq\mu_0$	$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\lvert z\rvert>z_{\alpha/2}$
$\mu=\mu_0$（σ^2 未知）	$\mu\neq\mu_0$	$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\lvert t\rvert>t_{\alpha/2}(n-1)$
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\chi^2<\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ 或 $\chi^2>\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$

10.3　学习要点

本章的重点是参数估计和假设检验，而估计方法和检验方法针对不同的情况有相应的方法和公式，比较容易掌握，难点在于对参数估计和假设检验思想的理解，学习时对这部分内容要加以注意。

10.4　例题增补

例 10-1　设总体 X 具有如下分布律：

X	0	1	2	3
p_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中，$\theta(0<\theta<1/2)$为未知参数。已知取得了样本值 3，1，3，0，3，1，2，3，求 θ 的矩估计值和最大似然估计值。

分析　本题的关键在于利用最大似然估计法时取到的样本值所对应的概率，要写出正确的似然函数。

解　（1）$\mu_1=E(X)=0\times\theta^2+1\times2\theta(1-\theta)+2\times\theta^2+3\times(1-2\theta)=3-4\theta$

以一阶样本矩 $A_1=\overline{X}$ 代替上式中的一阶总体矩 μ_1，解得 $\hat{\theta}=\frac{1}{4}(3-\overline{X})$，故 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=\frac{1}{4}(3-\bar{x})$。而 $\bar{x}=\frac{1}{8}(3+1+3+0+3+1+2+3)=2$，故 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=\frac{1}{4}$。

（2）似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{8}P(X=x_i)=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4$$

取对数得 $$\ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta)$$

从而得到对数似然方程为

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=0$$

解得 $\theta=\frac{7\pm\sqrt{13}}{12}$（根据题意舍去加号），得到 θ 的最大似然估计值为

$$\hat{\theta}=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$$

例 10-2　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，试选择适当的常数 k，使 $k\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计。

分析　无偏性一般用定义判断即可。注意对此题中公式 $E(X)^2=D(X)+E^2(X)$ 及期望性质的利用。

解　由题意有　$E(X_i)=\mu,\quad D(X_i)=\sigma^2(i=1,2,\cdots,n-1)$

若 $k\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 是 σ^2 的无偏估计，即有常数 k 使 $E\left[k\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2\right]=\sigma^2$ 成立。

由于　$E(X_{i+1}-X_i)^2=D(X_{i+1}-X_i)+E^2(X_{i+1}-X_i)=D(X_{i+1})+D(X_i)=2\sigma^2$

故 $$E\left[k\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2\right]=k\left[\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}-X_i)^2\right]=k\sum_{i=1}^{n-1}2\sigma^2=2k(n-1)\sigma^2$$

得到 $$k=\frac{1}{2(n-1)}$$

例 10-3　设从均值为 μ，方差为 $\sigma^2>0$ 的总体中分别抽取容量为 n_1,n_2 的两个独立样本，样本均值分别记为 $\overline{X}_1,\overline{X}_2$。

（1）证明：对于任意满足 $a+b=1$ 的常数 a 和 b，$T=a\overline{X}_1+b\overline{X}_2$ 都是 μ 的无偏估计。

（2）a 和 b 为何值时，$D(T)$ 达到最小？

分析　此类问题实质上是高等数学中的最值问题，注意不同课程之间的联系。

（1）**证明**：设总体为 X，由已知有 $E(X)=\mu,D(X)=\sigma^2$，于是

$$\begin{aligned}E(T)&=E(a\overline{X}_1+b\overline{X}_2)=aE(\overline{X}_1)+bE(\overline{X}_2)\\&=aE(X)+bE(X)=(a+b)\mu=\mu\end{aligned}$$

故 $T=a\overline{X}_1+b\overline{X}_2$ 是 μ 的无偏估计。

证毕。

（2）**解**　$D(T)=D(a\overline{X}_1+b\overline{X}_2)=a^2D(\overline{X}_1)+b^2D(\overline{X}_2)=a^2\frac{\sigma^2}{n_1}+b^2\frac{\sigma^2}{n_2}$

$$=\left[\frac{a^2}{n_1}+\frac{(1-a)^2}{n_2}\right]\sigma^2$$

令$\frac{\mathrm{d}D(T)}{\mathrm{d}a}=\left[\frac{2a}{n_1}+\frac{2(1-a)}{n_2}\right]\sigma^2=0$，解得 $a=\frac{n_1}{n_1+n_2}$。

由于 $\frac{\mathrm{d}^2D(T)}{\mathrm{d}a^2}=\frac{2(n_1+n_2)}{n_1n_2}\sigma^2>0$，故当 $a=\frac{n_1}{n_1+n_2}$时，$D(T)$达到最小，此时有

$$a=\frac{n_1}{n_1+n_2},\quad b=\frac{n_2}{n_1+n_2}$$

例 10-4　从一批钉子中随机抽取 16 枚，测得其长度(单位：cm)如下。

2.14　2.10　2.13　2.15　2.13　2.12　2.13　2.10

2.15　2.12　2.14　2.10　2.13　2.11　2.14　2.11

假设钉子的长度 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，在下列两种情况下分别求总体均值 μ 的置信度为 90%的置信区间：

(1) 已知 $\sigma=0.01$。

(2) σ 未知。

分析　求均值 μ 的置信区间时，首先要考察方差是否已知，再确定所需要的置信区间。

解　$1-\alpha=0.9,\alpha=0.1$。

(1) 已知 $\sigma=0.01$。这时 μ 的置信区间为$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$，其中 $n=16,\bar{x}=2.125,z_{\alpha/2}=z_{0.05}=1.645$，代入上式可得 μ 的置信区间为

$$\left(2.125\pm\frac{0.01}{4}z_{0.05}\right)=\left(2.125\pm\frac{0.01}{4}\times1.645\right)=(2.121,2.129)$$

(2) σ 未知。μ 的置信区间为$\left(\overline{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$。

现在$\bar{x}=2.125,s=0.0173,n=16,t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.05}(15)=1.7531$，将其代入上式可得 μ 的置信区间为

$$\left(2.125\pm\frac{0.0173}{\sqrt{16}}\times1.7531\right)=(2.117,2.133)$$

例 10-5　食品厂用自动灌装机装罐头食品，每罐标准质量为 500g，每隔一定时间需要检验机器的工作情况。现抽取 10 罐，测得其质量(单位：g)如下。

495　510　505　498　503　492　502　51　497　506

假设重量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，试问机器工作是否正常($\alpha=0.02$)?

解　本题是在方差未知的条件下检验均值 $\mu=500$ 是否成立。

提出假设　　$H_0:\mu=\mu_0=500,\quad H_1:\mu\neq\mu_0$

知拒绝域为　　$W=\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|>t_{\alpha/2}(n-1)\right\}$

现在 $n=10,t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.01}(9)=2.82,\bar{x}=502,s=6.5,\mu_0=500$，将其代入上式计算得

$$t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{502-500}{6.5/\sqrt{10}}\approx0.97$$

由于$|t|=0.97<2.82$,落在接受域,故接受H_0。在$\alpha=0.02$时可以认为自动灌装机工作正常。

10.5 教材部分习题解题参考

习题 10-2

1. 设总体 X 的密度函数为

$$f(x;\ a)=\begin{cases}\dfrac{2}{a^2}(a-x) & 0<x<a\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

从中获得样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$,求参数 a 的矩估计量。

解 $\mu_1=E(X)=\int_0^a x\dfrac{2}{a^2}(a-x)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{a^2}\left(a\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a=\dfrac{a}{3}$

以一阶样本矩 $A_1=\overline{X}$ 代替上式中的一阶总体矩 μ_1,得方程

$$A_1=\frac{a}{3}$$

解出 a,得到 a 的矩估计量为

$$\hat{a}=3\overline{X}$$

3. 设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$$

其中,$\theta>0$ 是未知参数,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为 X 的一个样本。求参数 θ 的矩估计量和最大似然估计量。

解 (1) 该总体 X 服从指数分布,故有 $\mu_1=E(X)=\theta$,因此 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\overline{X}$。

(2) 似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x_i}{\theta}}=\theta^{-n}\prod_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-\frac{x_i}{\theta}}=\theta^{-n}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}}$$

$$\ln L(\theta)=-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

对数似然方程为
$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i=0$$

解得 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$,则 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\overline{X}$。

5. 设某种清漆 9 个样品的干燥时间(单位：h)如下。

6.0　5.7　5.8　6.5　7.0　6.3　5.6　6.1　5.0

并设干燥时间总体服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$。在下列两种情况下求 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间。

（1）由以往经验知 $\sigma=0.6(\mathrm{h})$；

（2）σ 未知。

解　（1）σ 已知，则 μ 的置信区间为 $\left(\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$。

现在 $\bar{x}=6,\sigma=0.6,n=9,\alpha=0.05,z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96$，将其代入上式可得 μ 的置信区间为

$$\left(6\pm\frac{0.6}{3}z_{0.025}\right)=(6\pm0.2\times1.96)=(5.608,6.392)$$

（2）σ 未知，μ 的置信区间为 $\left(\overline{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$。

现在 $\bar{x}=6,s^2=0.33,n=9,\alpha=0.05,t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(8)=2.306$，将其代入上式可得 μ 的置信区间为

$$\left(6\pm\frac{\sqrt{0.33}}{3}2.306\right)=(6\pm0.442)=(5.558,6.442)$$

6. 已知某公司每星期投入1万元广告费使所属每个零售网点每星期销售增加的糖果数量服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，从公司所属众多零售网点中随机抽查12个零售网点，它们每星期销售增加的糖果平均数量为418kg，标准差为25kg。求每个零售网点每星期销售增加的糖果平均数量 μ 的置信水平为0.9的置信区间。

解　σ 未知，μ 的置信区间为 $\left(\overline{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$。

现在 $\bar{x}=418,s^2=25^2,n=12,\alpha=0.1,t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.05}(11)=1.7959$，将其代入上式可得 μ 的置信区间为

$$\left(418\pm\frac{25}{\sqrt{12}}1.7959\right)=(418\pm12.96)=(405.04,430.96)$$

7. 某饮料厂用自动灌装机装饮料，规定每瓶饮料的净质量为500g。某天随机抽取了9瓶进行检测，测得净质量的样本均值为 $\bar{x}=499\mathrm{g}$，样本方差 $s^2=16.03^2$。求总体方差 σ^2 的置信水平为0.95的置信区间。

解　σ^2 的置信区间为 $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$。

将 $n=9,s^2=16.03^2,\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.025}(8)=17.534,\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.975}(8)=2.180$ 代入上式得置信区间为

$$\left(\frac{8\times16.03^2}{17.534},\frac{8\times16.03^2}{2.18}\right)=(117.24,942.98)$$

习题 10-3

1. 某厂生产一种灯泡，其寿命服从正态分布 $N(\mu,200^2)$。从过去较长一段时间的生产情况来看，灯泡的平均寿命为1500h。现采用新工艺后，在所生产的灯泡中抽取25只，测得平均寿命为1675h。问采用新工艺后，灯泡寿命是否有显著提高($\alpha=0.05$)？

解 本题是在已知 $\sigma^2=200^2$ 的条件下对均值 $\mu=1500$(h)的检验。

提出假设 $H_0:\mu=\mu_0=1500,\quad H_1:\mu\neq\mu_0$

拒绝域为 $$W=\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|>z_{\alpha/2}\right\}$$

现在 $n=25, z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96, \bar{x}=1675, \sigma^2=200^2, \mu_0=1500$,将其代入上式计算得

$$z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{1675-1500}{200/\sqrt{25}}=4.375$$

由于 $|z|=4.375>1.96$,落在拒绝域,故拒绝 H_0。可以认为采用新工艺后灯泡寿命在显著性水平 0.05 下有显著提高。

2. 某县对初一年级语文成绩进行考核,从中随机抽取 400 名学生,考核结果平均分为 67.6 分。根据历年资料知标准差为 14.4。是否可以说该县初一年级语文平均分为 65 分($\alpha=0.05$)?

解 本题是在已知 $\sigma^2=14.4^2$ 的条件下对均值 $\mu=65$(分)的检验。

提出假设 $H_0:\mu=\mu_0=65,\quad H_1:\mu\neq\mu_0$

知拒绝域为 $$W=\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|>z_{\alpha/2}\right\}$$

现在 $n=400, z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96, \bar{x}=67.6, \sigma^2=14.4^2, \mu_0=65$,将其代入上式计算得

$$z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{67.6-65}{14.4/\sqrt{400}}\approx 3.61$$

由于 $|z|=3.61>1.96$,落在拒绝域,故拒绝 H_0。可以认为在显著性水平 0.05 下该县初一年级语文平均分不是 65 分。

3. 根据长期资料分析知某种钢筋的强度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$。今随机地抽取 6 根进行强度试验,测得强度(单位:MPa)如下。

48.5 49.0 53.5 49.5 56.0 52.5

问能否认为该种钢筋的平均强度为 52.0MPa($\alpha=0.05$)?

解 本题是在方差未知的条件下检验均值 $\mu=52.0$ 是否成立。

提出假设 $H_0:\mu=\mu_0=52.0,\quad H_1:\mu\neq\mu_0$

知拒绝域为 $$W=\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|>t_{\alpha/2}(n-1)\right\}$$

现在 $n=5, t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(4)=2.7764, \bar{x}=51.5, s=2.723, \mu_0=3.25$,将其代入上式计算得

$$t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{51.5-52.0}{2.723/\sqrt{6}}\approx -0.4498$$

由于 $|t|=0.4498<2.7764$,落在接受域,故接受 H_0。在 $\alpha=0.05$ 下可以认为该种钢筋的平均强度为 52.0MPa。

5. 某公司用自动包装机包装该公司的产品,规定标准含量为每袋净含量 500g。现在随机抽取 10 袋,测得各袋净含量(单位:g)如下。

495 510 505 498 503 492 502 505 497 506

设每袋净含量服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，能否认为每袋净含量的标准差为 5g($\alpha=0.05$)？

解 该题是对方差的检验。

提出假设 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2=5^2$， $H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$

拒绝域为
$$W=\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\right\}$$

或
$$W=\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\}$$

现在 $n=10,\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.025}(9)=19.023,\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.975}(9)=2.70,\sigma_0^2=5^2$，观测值 $s^2=31.5844$，将其代入上式计算得

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\frac{9\times 31.5844}{5^2}=11.37$$

由于 $\chi^2_{0.975}(9)=2.709<\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=11.37<\chi^2_{0.025}(9)=19.023$，所以接受 H_0。在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下认为每袋净含量的标准差为 5g。

总习题 10

1. 选择题。

(1) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，μ 和 σ^2 均未知，则下列不是统计量的是(　　)。

A. $\sum_{i=1}^{n}X_i$　　B. $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

C. $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$　　D. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$

(2) 设有来自正态总体 $X\sim N(\mu,0.6^2)$ 容量为 36 的样本，其样本均值 $\overline{X}=4$，则未知参数 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为(　　)(已知 $Z_{0.025}=1.96,Z_{0.05}=1.65$)。

A. (3.804,4.196)　　B. (3.835,4.165)

C. (3.167,4.657)　　D. (3.058,4.249)

(3) 设总体 $X\sim(3,2^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为 X 的样本，则下列式子正确的是(　　)。

A. $\frac{\overline{X}-3}{2}\sim N(0,1)$　　B. $\frac{\overline{X}-3}{2\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

C. $\frac{\overline{X}-3}{4}\sim N(0,1)$　　D. $\frac{\overline{X}-3}{2/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

(4) 总体 $X,E(X)=\mu$ 为待检验参数，如果在显著性水平 $\alpha_1=0.05$ 下，接受 $H_0:\mu=\mu_0$，那么在显著性水平 $\alpha_2=0.01$ 下，下列结论正确的是(　　)。

A. 不接受也不拒绝 H_0　　B. 拒绝 H_0

C. 接受 H_0　　D. 可能接受也可能拒绝 H_0

(5) 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ 和 σ^2 均未知，检验假设 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2,H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$。若用 χ^2

检验法进行检验，则在显著性水平 α 之下拒绝域是(　　)。

A. $\chi^2 \geqslant \chi^2_{\alpha}(n-1)$

B. $\chi^2 \geqslant \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\chi^2 \leqslant \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

C. $\chi^2 \leqslant \chi^2_{\alpha}(n-1)$

D. $\chi^2_{1-\alpha}(n-1) \leqslant \chi^2 \leqslant \chi^2_{\alpha}(n-1)$

(6) 在 H_0 为原假设，H_1 为备择假设的假设检验中，显著性水平为 α，则(　　)。

A. P(接受 $H_0 \mid H_0$ 成立)$=\alpha$　　B. P(接受 $H_1 \mid H_1$ 成立)$=\alpha$

C. P(接受 $H_1 \mid H_0$ 成立)$=\alpha$　　D. P(接受 $H_0 \mid H_1$ 成立)$=\alpha$

2. 填空题。

(1) 设 X_1, X_2, X_3 是来自正态总体 $X \sim N(\mu, 1)$ 的样本，则当 $a=$________时，$\hat{\mu}=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{2}X_2+aX_3$ 是总体均值 μ 的无偏估计。

(2) 设 X_1, X_2, X_3 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，$\hat{\mu}_1=\frac{1}{4}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{1}{2}X_3$，$\hat{\mu}_2=\frac{1}{5}X_1+\frac{4}{5}X_3$，是总体 μ 的无偏估计量，则这两个估计量中较为有效的是________。

(3) 设总体 X 服从正态分布即 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，σ^2 已知。检验 $H_0: \mu=\mu_0$，当 H_0 为真时所用统计量为________，该统计量服从________分布。

(4) 设总体 X 服从正态分布即 $X \sim N(4, \sigma^2)$，检验 $H_0: \sigma^2=\sigma_0^2$，当 H_0 为真时所用统计量为________，该统计量服从________分布。

(5) 在显著性检验中，若要使犯两类错误的概率同时变小，则只有增加________。

3. 设总体 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta} & 0<x<1 \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，其中 $\theta>-1$ 是未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为 X 的一个样本。求参数 θ 的矩估计量和最大似然估计量。

4. 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1} & 0<x<1 \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，其中，$\theta>0$ 未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体的一个样本。求参数 θ 的矩估计量和最大似然估计量。

5. 设某产品的性能指标 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$。现随机抽取 20 个产品进行检测，检测后经计算得到这些产品的性能指标均值 $\bar{x}=5.21$，$s^2=0.049$。求 X 的方差 σ^2 的置信水平为 0.95 的置信区间。

6. 一自动车床加工零件的长度服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$。车床正常工作时，加工零件长度均值为 10.5。经过一段时间的生产后，要检验一下这一车床是否工作正常。为此随机抽取该车床加工的 31 个零件，算得均值为 11.08，标准差为 0.516，设加工零件长度的方差不变，问是否可以认为此车床工作正常($\alpha=0.05$)？

7. 设用过去的铸造方法，零件强度服从正态分布，其标准差为 1.6kg/mm^2。为了降低成本，改变了铸造方法，测得用新方法铸出的零件强度如下。

51.9　53.0　52.7　54.1　53.2　52.3　52.5　51.1　54.1

问改变方法后零件强度的方差是否发生了显著变化($\alpha=0.05$)?

答案

1. (1) D　(2) A　(3) D　(4) C　(5) B　(6) C

2. (1) $\frac{1}{6}$　(2) $\hat{\mu}_1$　(3) $\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}, N(0,1)$　(4) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}, \chi^2(n-1)$　(5) 样本容量

3. 矩估计量 $\hat{\theta}=\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$,最大似然估计量 $\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}-1$

4. 矩估计量 $\hat{\theta}=\left(\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}\right)^2$,最大似然估计量 $\hat{\theta}=\frac{n^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}\ln X_i\right)^2}$

5. (0.167,0.3216)

6. 检验结果不能认为车床工作正常

7. 没有显著变化

参 考 文 献

[1] 同济大学应用数学系.线性代数[M].4 版.北京：高等教育出版社，2003.
[2] 吴赣昌.线性代数(经济类)[M].北京：中国人民大学出版社，2006.
[3] 戴立辉.线性代数[M].上海：同济大学出版社，2007.
[4] 同济大学数学系.高等数学[M].6 版. 北京：高等教育出版社，2008.
[5] 顾静相.经济数学基础[M].北京：高等教育出版社，2008.
[6] 姚孟臣.高等数学[M].北京：高等教育出版社，2008.
[7] 吴赣昌.高等数学(理工类)[M].北京：中国人民大学出版社，2007.
[8] 郭建英.概率统计[M].北京：北京大学出版社，2005.
[9] 田长生.概率统计与微积分[M].北京：科学出版社，2006.
[10] 李顺初.概率统计教程[M].北京：科学出版社，2009.
[11] 耿玉霞.经济应用数学[M].北京：电子工业出版社，2007.
[12] 陈刚.经济应用数学[M].北京：高等教育出版社，2008.
[13] 谭国律.文科高等数学[M].北京：北京航空航天大学出版社，2009.
[14] 魏权龄.运筹学简明教程[M].北京：中国人民大学出版社，2004.
[15] 石辅天.高等数学(经管类)[M].大连：东北大学出版社，2006.
[16] 黄廷祝.线性代数[M]. 北京：高等教育出版社，2009.